TD4 8 février 2017

Langages Formels

Exercice 1 (Grammaires)
Montrer que les langages suivants sont algébriques :

1. $\{ u\widetilde{u} \ : \ u \in \{a,b\}^* \}$ où $\widetilde{u}$ est l'image miroir
2. $\{ a^n b^m \ : \ n \neq m, \ n,m \in \mathbb{N} \}$
3. $\{ a^n b^p c^q \ : \ n,q \geq 0, \ p \geq n+q \}$
4. $\{ a^n b^p \ : \ 0 \leq n, \ n \leq p \leq 2n \}$

Exercice 2 (Langages de Dyck)
Soit $\Sigma_n = \{ a_i \ : \ 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \overline{a}_i \ : \ 1 \leq i \leq n \}$ un alphabet vu comme n paires de parenthèses. Soit $G_n = (N_n, \Sigma_n, P_n, S)$ la grammaire définie par $S \to a_1 S \overline{a}_1 S + \ldots + a_n S \overline{a}_n S + \epsilon$. Le langage $D_n^* = \mathcal{L}_{G_n}(S)$ est appelé langage de Dyck sur n paires de parenthèses.

1. Montrer que
$$D_1^* = \{ w \in \Sigma_1^* \ : \ |w|_{a_1} = |w|_{\overline{a}_1} \text{ et } |v|_{a_1} \geq |v|_{\overline{a}_1} \text{ pour tout } v \leq w \}.$$
2. On considère le système de réécriture $R_n = (\Sigma_n, P'_n)$ dont les règles sont $\{ (a_i \overline{a}_i, \epsilon) \ : \ 1 \leq i \leq n \}$. Montrer que
$$D_n^* = \{ w \in \Sigma_n^* \ : \ w \to_{R_n}^* \epsilon \}.$$

Exercice 3 (Propriétés de fermeture)
Montrer que la famille des langages algébriques est fermée par :

1. Concaténation ;
2. Itération ;
3. Union ;
4. Image miroir ;
5. substitution algébrique [1].

1. Une substitution $\sigma : \Sigma \to 2^{\Sigma'^*}$ tel que pour tout $a \in \Sigma$, $\sigma(a)$ est algébrique.

Exercice 4 (Problème du vide)
Montrer que le problème du vide d'une grammaire algébrique est PTIME-dur, par réduction de Horn-SAT.

Exercice 5 (Langages rationnels et grammaires linéaires)
Soit $G = (N, \Sigma, P, S)$ une grammaire algébrique. On dit que G est
- *linéaire* quand $P \subseteq N \times (\Sigma^* \cup \Sigma^* N \Sigma^*)$
- *linéaire gauche* quand $P \subseteq N \times (\Sigma^* \cup N \Sigma^*)$
- *linéaire droite* quand $P \subseteq N \times (\Sigma^* \cup \Sigma^* N)$.

Montrer qu'un langage est rationnel ssi il peut être engendré par une grammaire linéaire gauche (ou droite).

Exercice 6 (Grammaires ambiguës)

1. Montrer que la grammaire suivante est ambiguë :

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \textsf{if } c \textsf{ then } S \textsf{ else } S \\ S & \rightarrow & \textsf{if } c \textsf{ then } S \\ S & \rightarrow & a \end{array}$$

2. Voici un extrait de la syntaxe d'ALGOL 60, qui évite l'ambiguïté ci-dessus grâce à la distinction entre `<unconditional statement>` et `<conditional statement>` :

```
                <statement> ::= <unconditional statement>
                              |<conditional statement>
                              |<for statement>
<conditional statement> ::= <if statement>
                              |<if statement> 'else' <statement>
                              |<if clause> <for statement>
            <if statement> ::= <if clause> <unconditional statement>
               <if clause> ::= 'if' <Boolean expression> 'then'
           <for statement> ::= <for clause> <statement>
              <for clause> ::= 'for' <variable> ' :=' <for list> 'do'
```

   Montrer que cette grammaire reste néanmoins ambiguë.
3. Donner une grammaire non ambiguë équivalente.