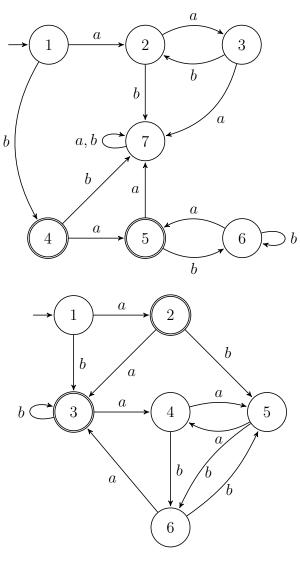
TD3 9 février 2017

# Langages Formels

## Exercice 1 (Minimisation)

Minimiser les deux automates suivants, en utilisant l'algorithme de Moore :



1/4

#### Exercice 2 (Automate minimal d'une expression)

Donner un automate minimal pour  $((a(a+b)^2+b)^*a(a+b))^*$ .

#### Exercice 3 (Minimisation par renversement de Brzozowski)

Montrer que le déterminisé d'un automate co-déterministe co-accessible qui reconnaît L est (isomorphe à) l'automate minimal de L. En déduire un algorithme pour minimiser un automate. Quelle est la complexité de cette méthode?

#### Exercice 4 (Complexité en états d'un langage)

Étant donné un langage reconnaissable L on peut définir sa complexité en états Sc(L) comme le nombre d'états de son automate minimal. Montrer les inégalités suivantes ( $L^{t}$  est le transposé de L, langage des images miroirs des mots de L):

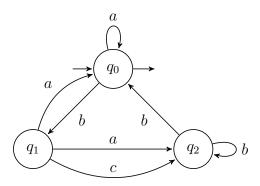
- 1.  $Sc(L \cup K) \leq Sc(L)Sc(K)$ ;
- 2.  $Sc(L \cap K) < Sc(L)Sc(K)$ ;
- 3.  $Sc(L^{t}) \leq 2^{Sc(L)}$ ;
- 4.  $Sc(LK) \le (2Sc(L) 1)2^{Sc(K)-1}$ .

#### Exercice 5 (Algorithme de Brzozowski-McCluskey)

L'objectif de cet exercice est de traduire un automate fini en une expression rationnelle. Nous allons procéder par transformations successives de l'automate, en utilisant une généralisation du type d'automate considéré : la relation de transition sera un sous-ensemble de  $Q \times 2^{\Sigma^*} \times Q$ . Une exécution d'un tel automate reconnait la concaténation des langages des transitions, et le langage reconnu par l'automate est l'union de ces exécutions.

- 1. Montrer que tout automate généralisé est équivalent à un automate généralisé pour lequel il existe exactement une transition entre chaque paire d'états :  $q' \in \delta(q, L)$  et  $q' \in \delta(q, L')$  implique L = L'.
- 2. Soit un automate généralisé  $\mathcal{A}$  avec un unique état initial i, un unique état final f. Soit  $q \in Q_{\mathcal{A}}, q \notin \{i, f\}$ . Montrer qu'il existe un automate équivalent à  $\mathcal{A}$  avec pour ensemble d'états  $Q_{\mathcal{A}} \setminus \{q\}$ .
- 3. En déduire que si L est reconnu par un automate généralisé  $\mathcal{A}$ , alors L appartient à la clôture rationnelle des étiquettes des transitions de  $\mathcal{A}$ .

4. Appliquer la construction pour calculer une expression rationnelle correspondant à l'automate suivant :



5. On considère l'alphabet  $\Sigma_n = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ , et on définit :

$$L = \{ (a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_m, a_{m+1}) : m \ge 1, a_1 = 1, a_{m+1} = n \}$$

- (a) Donner un automate de taille quadratique reconnaissant L.
- (b) Quelle est la taille de l'expression obtenue par la construction précédente sur cet automate?

### Exercice 6 (Critère de reconnaissabilité)

On veut montrer que la version "ssi" de la troisième formulation du lemme de l'étoile est une caractérisation des langages réguliers. On dit qu'un langage L satisfait  $P_N$  si pour tout  $uv_1 \dots v_N w$  avec  $|v_i| \ge 1$  il existe  $0 \le j < k \le N$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$uv_1 \dots v_N w \in L \Leftrightarrow uv_1 \dots v_j (v_{j+1} \dots v_k)^n v_{k+1} \dots v_N w \in L.$$

Le théorème de Ehrenfeucht, Parikh & Rozenberg affirme que L est régulier ssi il existe un entier N tel que L satisfait  $P_N$ .

- 1. Montrer que si L appartient à  $P_N$  alors  $a^{-1}L$  aussi, pour tout  $a \in \Sigma$ .
- 2. Démontrer le théorème, en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de langages satisfaisant  $P_N$  pour un N fixé.
- 3. On rappelle le théorème de Ramsey, spécialisé pour nos besoins : pour tout N il existe R tel que, pour tout ensemble E de cardinal au moins R et pour toute partition  $\mathcal{P}$  de  $\mathfrak{P}_2(E) = \{\{e, e'\}: e, e' \in E, e \neq e'\}$

en deux classes, il existe un sous-ensemble  $F \subseteq E$  de cardinal N tel que  $\mathfrak{P}_2(F)$  est tout entier contenu dans une seule classe de  $\mathcal{P}$ .

Soient L et L' deux langages satisfaisant  $P_N$  et coïncidant sur les mots de longueur inférieure R-1. Montrer qu'ils coïncident aussi sur les mots de longueur  $M \geq R-1$ , par induction sur M. On pourra considérer, pour un  $f=a_1 \dots a_{R-1}t$  de longueur M (avec  $a_i \in \Sigma$ ) la partition suivante de  $\mathfrak{P}_2([0; N-1])$ :

$$X_f = \{ (j,k) : 0 \le j < k \le R - 1, \ a_1 \dots a_j a_{k+1} \dots a_{R-1} t \in L \}$$
  
$$Y_f = \mathfrak{P}_2([0;R-1]) \setminus X_f$$

4. Conclure.