Devoir Maison Algorithmique 1, Serge Haddad

A rendre lors du TD du 22 octobre, rédigé à la main sur papier.
Tout algorithme doit être présenté en pseudo-code (comme vu en cours).

On considère le problème de la fusion de deux tableaux triés A, B de taille respective m et n avec $m \leq n$ dans un tableau C de taille $m + n$.

Etant donné un tableau X, on note $X[i, j]$ le sous-tableau allant de l'indice i à j. Si $j < i$ alors il s'agit d'un tableau vide.

Dans la suite, on vous demande des nombres exacts (comme $2n + 1$) et pas des valeurs asymptotiques (comme $\Theta(n)$).

Partie 1

Question 1 Exprimer en fonction de m et n le nombre maximal de comparaisons de cellules de tableaux de l'algorithme vu en cours (transparent 5).

On propose un nouvel algorithme récursif qui procède ainsi. Si $m = 0$ alors il recopie B dans C sinon :

- Il effectue une recherche dichotomique de l'élement $A[m]$ dans le tableau B qui renvoie un indice i tel que $B[i] \leq A[m] \leq B[i + 1]$ avec par convention $B[0] = -\infty$ et $B[n + 1] = +\infty$.
- Il recopie $A[m]$ et $B[i + 1, n]$ dans $C[m + i, m + n]$.
- Il s'appelle récursivement avec $A[1, m - 1]$, $B[1, i]$ et $C[1, m + i - 1]$ en échangeant éventuellement le rôle de A et B.

Question 2 Ecrire cet algorithme (y compris la fonction de recherche).

Question 3 Annoter l'algorithme par des assertions « à la Hoare » afin d'établir sa correction partielle.

Question 4 Exprimer en fonction de m et n le nombre maximal de comparaisons de cellules de tableaux de cet algorithme.

Question 5 Pour quelles valeurs de m et n, vaut-il mieux utiliser cet algorithme que celui vu en cours ?

Partie 2

On se donne une fonction $\kappa(m, n)$ qui renvoie un entier compris entre 1 et n et on propose l'algorithme suivant. Si $m = 0$ alors il recopie B dans C sinon :

- Si $A[m] < B[\kappa(m, n)]$ alors il recopie $B[\kappa(m, n), n]$ dans $C[m + \kappa(m, n), m + n]$. Puis il s'appelle récursivement avec A, $B[1, \kappa(m, n) - 1]$ et $C[1, m + \kappa(m, n) - 1]$ en échangeant éventuellement le rôle de A et B ;
- Sinon il effectue une recherche dichotomique de l'élement $A[m]$ dans le tableau $B[\kappa(m, n) + 1, n]$ qui renvoie un indice i tel que $B[i] \leq A[m] \leq B[i + 1]$ avec des conventions similaires à celles de la partie 1. Il recopie $A[m]$ et $B[i + 1, n]$ dans $C[m + i, m + n]$ et il s'appelle récursivement avec $A[1, m - 1]$, $B[1, i]$ et $C[1, m + i - 1]$ en échangeant éventuellement le rôle de A et B.

Question 6 Ecrire cet algorithme et établir sa correction partielle.

On pose $\alpha = \lfloor \log_2(\frac{n}{m}) \rfloor$ et on choisit $\kappa(m, n) = n - 2^\alpha + 1$. On écrit n de manière unique comme $n = 2^\alpha(m + p) + \theta$ avec $0 \leq p < m$ et $0 \leq \theta < 2^\alpha$.

Notons $K(m, n)$ le nombre maximal de comparaisons de cellules de tableaux de cet algorithme. Attention, pour résoudre les questions 7 et 8 on se rappellera que α, p et θ dépendent de m et n.

Question 7 Etablir la relation de récurrence suivante avec $n > m$:

$$K(m, n) = \max(1 + K(m, n - 2^\alpha), 1 + \alpha + K(m - 1, n))$$

Question 8 Montrer par induction que :

$$K(m,n) \leq (2+\alpha)m + p - 1$$

Question 9 En déduire que le nombre maximal de comparaisons de cellules de tableaux de cet algorithme est toujours inférieur ou égal à celui de l'algorithme du cours.