Application de la topologie algébrique en informatique théorique

Jérémy DUBUT

Stage de M1
sous la direction de Kathryn HESS BELLWALD
ENS - Cachan / EPFL - Lausanne

12 Septembre 2012

Laboratoire et équipe

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Higher Dimensional Automata

Ensemble pré-cubique :

- une famille d'ensembles $(Q_n)_{n\geq 0}$
- une famille de fonctions
  $s_i^n, t_i^n : Q_n \to Q_{n-1}$ pour tout $n > 0$ et $1 \leq i \leq n$

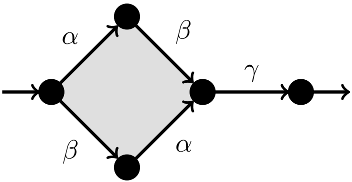
vérifiant :
$\alpha_i^n \circ \beta_j^{n+1} = \beta_{j-1}^n \circ \alpha_i^{n+1}$ *pour tout* $1 \leq i < j \leq n+1$ *et* $\alpha, \beta \in \{s, t\}$

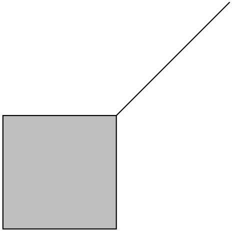
Higher Dimensional Automaton (HDA) sur A :

- un ensemble pré-cubique $((Q_n), (s_i^n), (t_i^n))$
- un point initial $I_0 \in Q_0$
- un ensemble de points finaux $F \subseteq Q_0$
- une fonction d'étiquetage $l : Q_1 \to A$

tels que $l(s_i^2(q)) = l(t_i^2(q))$ *pour tout* $q \in Q_2$ *et* $i \in \{1, 2\}$

Exemple





$x \in Q_n$	cube de dimension n
ordre induit par les transitions	ordre partiel produit sur chaque cellule
execution	'trace de chemin croissant'
HDA	réalisation géométrique

Pospace, di-path, espace des traces

Pospace

- X un espace topologique
- $\leq_X \subseteq X \times X$ un ordre partiel fermé

Di-path

$f : I = [0,1] \to X$ une fonction continue tq :

$$\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq_X f(y)$$

$\vec{P}(X)(c,d) :=$ espace des di-paths dans X de c à d muni de la topologie compacte-ouverte

Espace des traces

$$\vec{T}(X)(c,d) := \vec{P}(X)(c,d)/Rep_+(I)$$

où $Rep_+(I) =$ monoide des reparamétrisations croissantes.

Objectifs

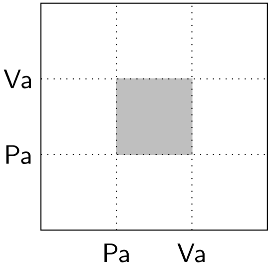
- étudier le type d'homotopie de $\vec{T}(X)(c, d)$ quand X est un HDA
- observer quelles informations sur le HDA cela donne

HDA simples, langage PV

HDA simple

X de la forme $I^n \setminus F$ avec :

- $F = \bigcup_{j=1}^{l} T_j$
- $T_j = \prod_{i=1}^{n} I_i^j$
- $I_i^j =]a_i^j, b_i^j[$ ou $[0, b_i^j[$ ou $]a_i^j, 1]$ ou $[0, 1]$
- $a_i^j :=$ inf I_i^j et $b_i^j :=$ sup I_i^j



Travaux de Martin Raussen

- propriétés topologiques (métrisable, localement compact, localement contractile, type d'homotopie d'un CW complexe)
- algorithme de construction d'un complexe simplicial (et d'un prod-simplicial complexe) homotopiquement équivalent
- espace des traces d'un HDA à sémaphores d'arité 1 homotopiquement équivalent à un espace discret en bijection avec un ensemble de permutations compatibles

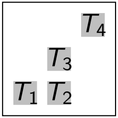
Ordre partiel sur les trous, graphe

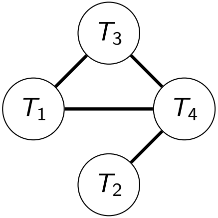
Ordre partiel, chaîne

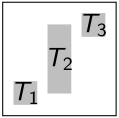
$T_i < T_j$ si $\vec{T}(X)((b_1^i, ..., b_n^i), (a_1^j, ..., a_n^j)) \neq \varnothing$
$T_{i_1}, ..., T_{i_k}$ k-chaîne si $T_{i_1} < ... < T_{i_k}$

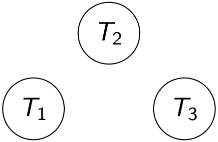
Graphe des trous

G_X, graphe non-orienté :
Sommets : T_i
Arêtes : (T_i, T_j) si $T_i < T_j$ ou $T_j < T_i$









Generalized moment angle complex

Generalized moment angle complex

Soient $(\underline{X},\underline{A}) = \{(X_i, A_i) \mid i \in \{1, ..., l\}\}$ un ensemble de paires de CW complexes et G, un graphe non orienté à l sommets, qu'on supposera numérotés de 1 à l.

Pour tout σ, clique de G, on définit :

$$D(\sigma) := \prod_{i=1}^{l} Y_i \quad avec\ Y_i = X_i\ si\ i \in \sigma\ et\ Y_i = A_i\ sinon$$

On définit alors le generalized moment angle complex déterminé par $(\underline{X},\underline{A})$ et G comme :

$$Z_G(\underline{X},\underline{A}) := \bigcup_{\sigma \in G} D(\sigma)$$

Si de plus, $\forall i$, $X_i = X$ et $A_i = *$, on notera $Z_G(X)$ à la place.

Conjecture

Conjecture

Soit X, un HDA simple de dimension n avec l trous et ayant de bonnes propriétés Alors, $\vec{T}(X)(\mathbf{0},\mathbf{1})$ est homotopiquement équivalent à $Z_{G_X}(S^{n-2})$.
De plus,

$$H_0(\vec{T}(X)(\mathbf{0},\mathbf{1})) = \mathbb{Z}^{p_X} \quad H_i(\vec{T}(X)(\mathbf{0},\mathbf{1})) = 0 \text{ } pour \text{ } i \neq 0 \text{ } si \text{ } n = 2$$

avec p_X, le nombre de chaînes de trous de X.

$$H_{(n-2).k}(\vec{T}(X)(\mathbf{0},\mathbf{1})) = \mathbb{Z}^{p_k}$$

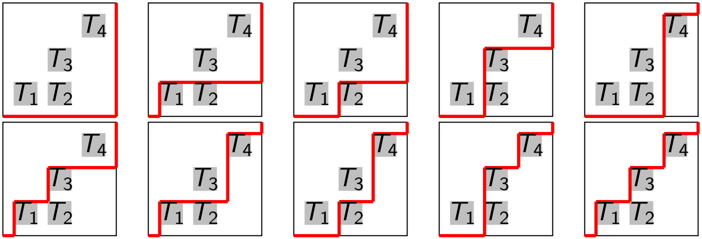
$$H_i(\vec{T}(X)(\mathbf{0},\mathbf{1})) = 0 \text{ } pour \text{ } i \neq (n-2).k \text{ } si \text{ } n > 2$$

avec p_k, le nombre de k-chaînes de X.

En dimension 2

Théorème

Soit X, de dimension 2 tel que pour tout $k = 1, 2$, il n'existe pas i, j tels que $a_k^i < a_k^j < b_k^i$ ou $a_k^i < b_k^j < b_k^i$.
Alors, $\vec{T}(X)(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ est homotopiquement équivalent à un espace discret à p_X éléments.

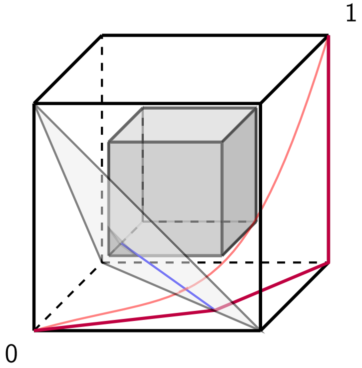


Un trou, l-chaîne

Théorème

Soit X, de dimension n dont le graphe des trous G_X est une l-clique (i.e., les trous forment une l-chaîne).
Alors, $\vec{T}(X)(\mathbf{0},\mathbf{1})$ est homotopiquement équivalent à

$$(S^{n-2})^l = Z_{G_X}(S^{n-2})$$



Trous incomparables

Théorème

Soit X, de dimension $n > 2$ dont le graphe des trous a l sommets et aucune arête (i.e., X a l trous incomparables). Supposons également que $\forall i, j$, $\forall k$, soit $b^j_k < a^i_k$ soit $b^i_k < a^j_k$, soit $a^i_k = a^j_k$ et $b^i_k = b^j_k$. Alors,

$$\vec{T}(X)(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \simeq \bigvee_{i=1}^{l} S^{n-2} = Z_{G_X}(S^{n-2})$$

Preuve

- calcul par récurrence des groupes d'homologie (par Mayer-Vietoris) et du groupe fondamental (par Van Kampen)
- l'unicité du type d'homotopie des espaces de Moore prouve le cas $n \geq 4$
- l'unicité du type d'homotopie des espaces d'Eilenberg-MacLane prouve le cas $n = 3$

Espace 'diagonalisable'

Diagonalisation admissible

$p^1 < ... < p^s \in I^n$, $p^0 = \mathbf{0}$ et $p^{s+1} = \mathbf{1}$.

$X_i := X \cap \prod_{j=1}^{n} [p_j^i, p_j^{i+1}]$ et $X_{p^1,...,p^s} := \bigcup_{i=0}^{s} X_i$

$p^1, ..., p^s$ diagonalisation admissible pour X si pour tout k il existe i tel que $T_k \subset \prod_{j=1}^{n} [p_j^i, p_j^{i+1}]$

Théorème

Si $p^1, ..., p^s$ est une diagonalisation admissible pour X et si pour tout $i \in \{0, ..., s\}$, $\vec{T}(X_i)(p^i, p^{i+1}) \simeq Z_{G_{X_i}}(S^{n-2})$ alors :

$$\vec{T}(X)(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \simeq Z_{G_X}(S^{n-2})$$

Conclusion et perspectives

- Fait :
  - formaliser une conjecture sur le type d'homotopie de l'espace des traces d'une classe générale de HDA
  - preuve de cette conjecture sur une sous-classe
- A faire :
  - voir quelles sont les hypothèses suffisantes pour que la conjecture soit vraie et la prouver
  - voir quelles informations en tirer sur le HDA

MERCI