

Homologie dirigée.

Rapport du stage de M2, MPRI

Jérémy DUBUT (ENS Cachan)
sous la direction de
Eric GOUBAULT (CEA LIST & Ecole Polytechnique)
Jean GOUBAULT-LARRECQ (LSV, ENS Cachan)

20 août 2014

Le contexte général

Etudier un système en explorant sa géométrie est le leitmotiv de la topologie algébrique dirigée. Ce domaine a émergé en informatique dans [Pra91], où Pratt introduit les automates de dimension supérieure (HDA) comme modèles de la concurrence, même si l'idée de géométrie de la concurrence est déjà évoquée par Dijkstra dans [Dij65]. Ces automates reposent sur une double vision : l'une combinatoire ou algébrique (l'automate lui-même, un ensemble pré-cubique), l'autre géométrique ou topologique (l'objet qu'il représente, à travers sa réalisation géométrique, un espace topologique muni d'une relation d'ordre). Cette double vision était déjà l'idée majeure du domaine bien connu en mathématiques de la topologie algébrique. Cependant, elle ne s'intéresse qu'à un monde où le temps est réversible, ce qui n'est pas le cas en concurrence. Il a donc fallu développer une théorie propre à ce monde dirigé. En une vingtaine d'années, le domaine a connu des avancées notoires : l'étude géométrique des HDA [Gou95], la vision plus mathématique de Grandis (voir par exemple, [Gra09]), les travaux de l'école danoise (voir par exemple ceux de Raussen et Fajstrup), les applications en concurrence [FGR98, GR02, GH05, BCC⁺11], mais aussi en algorithmique des protocoles distribués tolérants aux pannes [HKR13, Tas10], en réécriture (généralisation des théorèmes de Squier et Kobayashi, [Mal03, GMM13]) et en physique théorique (dans l'étude des causets [Mar00]).

Le problème étudié

La théorie garde essentiellement pour ligne directrice la théorie classique de la topologie algébrique, grâce à des analogues du monde dirigé des notions d'homotopie, de groupoïde fondamental par exemple. Cependant, il reste une notion qui n'a pas trouvé d'analogue dirigé totalement satisfaisant : l'homologie. Celle-ci a pour but d'étudier une structure en s'intéressant à ses trous. Mais, ce qui la rend intéressante informatiquement parlant, c'est qu'elle est calculable (de manière modulaire), contrairement à l'homotopie. Des tentatives ont été faites depuis la thèse d'Eric Goubault en 1995, mais les propriétés que l'on pourrait attendre d'une telle notion ne sont pas satisfaites. Le but de ce stage est de poser les bases d'une homologie dans un cadre dirigé.

La contribution proposée

Nous proposons un candidat d'homologie dirigée, les systèmes d'homologie. Ils étudient l'évolution des classes d'exécution modulo agencement d'actions indépendantes, à travers le type d'homotopie des espaces des traces (au sens de [Rau09]). Nous développons deux points de vue : l'un topologique à partir d'un pospace, dont on démontre des propriétés théoriques analogues à la théorie de l'homologie dans un cadre non dirigé (invariance par dihoméomorphisme, théorème d'Hurewicz, préservation de suites exactes) ; l'autre combinatoire pour pouvoir faire des calculs.

Les arguments en faveur de sa validité

Les propriétés théoriques que nous développons confirment que notre candidat se rapproche de l'homologie classique. Le théorème d'Hurewicz nous donne le lien avec la dihomotopie, les résultats de préservation des suites exactes nous permettent d'espérer une modularité de notre solution, l'invariance par dihoméomorphisme et par subdivision nous assure que notre candidat est stable par raffinement des actions, la vision combinatoire nous permet de faire des

calculs. Les exemples, quant à eux, confirment que la classification des systèmes est plus satisfaisante que les tentatives précédentes, notamment la distinction entre homotopie et dihomotopie.

Le bilan et les perspectives

L'homologie peut devenir un outil intéressant dans l'étude des systèmes, en particulier les systèmes concurrents, où le caractère non réversible du temps a un rôle important, que ce soit pour des problèmes de classification ou de vérification de propriétés temporelles (par exemple, détection de dead-locks).

Cependant, il reste encore énormément de choses à faire :

- faire le lien avec les bisimulations [FL13, Muk02], les équivalences observationnelles [PP90] et des propriétés temporelles [BC10] dans les systèmes de vraie concurrence, pour voir dans quelle mesure notre homologie dirigée est un invariant des propriétés informatiques de nos systèmes
- définir une représentation combinatoire de l'espace des traces directement à partir d'un ensemble pré-cubique plus adaptée aux calculs homologiques
- dériver des propriétés de modularité des théorèmes de préservation de suites exactes
- implémenter le calcul
- développer le lien avec l'homologie persistante [Car09].

Ce travail sera continué durant la thèse.

1 Introduction

Etudier un système en explorant sa géométrie est le leitmotiv de la topologie algébrique dirigée. Ce domaine a émergé en informatique dans [Pra91], où Pratt introduit les automates de dimension supérieure (HDA) comme modèles de la concurrence, même si l'idée de géométrie de la concurrence est déjà évoquée par Dijkstra dans [Dij65]. Ces automates reposent sur une double vision : l'une combinatoire ou algébrique (l'automate lui-même, un ensemble pré-cubique), l'autre géométrique ou topologique (l'objet qu'il représente, à travers sa réalisation géométrique, un espace topologique muni d'une relation d'ordre). Cette double vision était déjà l'idée majeure du domaine bien connu en mathématiques de la topologie algébrique. Cependant, elle ne s'intéresse qu'à un monde où le temps est réversible, ce qui n'est pas le cas en concurrence. Il a donc fallu développer une théorie propre à ce monde dirigé.

En une vingtaine d'années, le domaine a connu des avancées notoires : l'étude géométrique des HDA [Gou95], la vision plus mathématique de Grandis (voir par exemple, [Gra09]), les travaux de l'école danoise (voir par exemple ceux de Raussen et Fajstrup), les applications en concurrence [FGR98, GR02, GH05, BCC⁺11], mais aussi en algorithmique des protocoles distribués tolérants aux pannes [HKR13, Tas10], en réécriture (généralisation des théorèmes de Squier et Kobayashi, [Mal03, GMM13]) et en physique théorique (dans l'étude des causets [Mar00]). La théorie garde essentiellement pour ligne directrice la théorie classique de la topologie algébrique, grâce à des analogues du monde dirigé des notions d'homotopie, de groupoïde fondamental par exemple. Cependant, il reste une notion qui n'a pas trouvé d'analogue dirigé totalement satisfaisant : l'homologie. Celle-ci a pour but d'étudier une structure en s'intéressant à ses trous. Mais, ce qui la rend intéressante informatiquement parlant, c'est qu'elle est calculable (de manière modulaire), contrairement à l'homotopie. Le but de ce stage est de poser les bases d'une homologie dans un cadre dirigé.

Nous commencerons par présenter les systèmes qui nous intéresseront tout en les motivant dans la problématique de la géométrie de la vraie concurrence (section 2). Nous verrons ensuite les travaux existants en topologie algébrique, dans un cadre dirigé ou non (section 3) : tout d'abord, nous développerons en parallèle la notion d'homotopie et son analogue dirigé, la dihomotopie, ainsi que leurs liens avec l'étude des systèmes concurrents (section 3.1) ; puis nous présenterons l'homologie dans un cadre non dirigé, en particulier les propriétés que nous aimerions retrouver dans un bon analogue dirigé (section 3.2), que nous illustrerons d'exemples de calculs en annexe A ; nous ferons un rapide tour d'horizon des diverses tentatives de définitions d'homologie dirigée et des raisons pour lesquelles elles ne nous conviennent pas totalement (section 3.3). Enfin, nous étudierons en section 4 l'un de nos candidats d'homologie dirigée, les systèmes d'homologie, basés sur les notions de traces et de systèmes naturels. Nous développerons deux points de vue : l'un topologique (sections 4.1 et 4.2), dont nous présenterons les propriétés théoriques en section 4.3 ; l'autre combinatoire (section 4.4), dans l'objectif de faire des calculs.

2 La géométrie de la vraie concurrence

Nous utiliserons tout au long du rapport deux langages jouets. Le premier est basé sur les *primitives de synchronisation*, introduites par Dijkstra dans [Dij65]. C'est un langage à sémaphores (on entend par sémaphore une variable à valeurs dans les entiers positifs) dans lequel des processus peuvent effectuer deux types d'actions atomiques :

- une *P-opération* : si a est un sémaphore, un processus peut effectuer l'opération $P(a)$ qui consiste à diminuer la valeur de a de 1 dès que celle-ci est strictement positive. Intuitivement, si on voit un sémaphore comme une ressource ne pouvant être acquise que par un nombre donné de processus simultanément, sa valeur étant le nombre de processus pouvant encore y avoir accès, l'opération $P(a)$ consiste uniquement à demander l'accès à cette ressource.
- une *V-opération* : $V(a)$ consiste à augmenter la valeur de a de 1. Intuitivement, cela revient à rendre son accès.

Un *PV-programme* (à n processus) est un n -uplet de suites de P-opérations et V-opérations. Nous les noterons sous la forme $S_1|S_2|\dots|S_n$ et $S_i = \alpha_1^i.\alpha_2^i.\dots.\alpha_{k_i}^i$ où α_j^i est de la forme $P(a)$ ou $V(a)$, pour a un sémaphore. Par exemple, on écrira $P(a).V(a)|P(a).V(a)$, pour signifier que l'on a deux processus qui demandent à un moment de leur exécution l'accès à la variable a puis le rendent. Si on suppose que la valeur initiale de a est 1 (on dira que a est d'arité 1), les deux processus ne peuvent pas avoir accès à a simultanément. On peut modéliser l'espace des états possibles d'un tel programme comme un sous-espace de \mathbb{R}^2 :

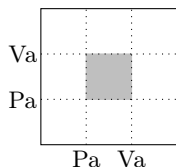


FIGURE 1

où la partie grisée représente un trou, correspondant aux états interdits. De manière plus générale, on peut modéliser l'espace des états possibles de tout programme fini valable (dans le sens où il faut demander l'accès avant de le rendre, ne pas demander un accès que l'on a déjà et tout accès doit être rendu) de ce langage comme un sous-espace de \mathbb{R}^n (où n est le nombre de processus) de la même façon.

Le deuxième est les *protocoles à mémoire instantanée atomique* (immediate snapshot protocols), voir par exemple [HKR13]. Dans un tel protocole, des processus communiquent en lisant et écrivant dans une mémoire partagée. Cette mémoire est partitionnée en morceaux, un pour chaque processus. Un processus peut alors effectuer deux types d'opérations atomiques :

- une *U-opération* (update) pour modifier la valeur de sa mémoire
- une *S-opération* (scan) pour lire instantanément l'intégralité de la mémoire, y compris la mémoire des autres processus.

Un *SU-round* (à n processus) est un n -uplet de suites de S-opérations et U-opérations. Nous les noterons sous la forme $S_1|S_2|\dots|S_n$ et $S_i = \alpha_1^i.\alpha_2^i.\dots.\alpha_{k_i}^i$ où $\alpha_j^i \in \{U, S\}$. Un *SU-programme* est une suite R_1, \dots, R_p de SU-rounds, notée $R_1 \bullet \dots \bullet R_p$. \bullet joue le rôle d'une opération de synchronisation : $R_1 \bullet R_2$ signifie que tous les processus de R_1 doivent effectuer toutes leurs opérations avant que l'on puisse commencer R_2 . Les opérations U et S ne sont pas indépendantes, un processus ne peut pas modifier sa mémoire pendant qu'un autre scan toute la mémoire, la valeur de celle-ci ne serait alors pas bien définie. Par contre, deux opérations U (resp. S) sont indépendantes car les mémoires des processus sont séparées (resp. car elles ne modifient pas la mémoire). Comme les PV-programmes, les SU-programmes ont aussi une représentation géométrique. Illustrons-la sur le SU-programme $(S|U) \bullet (U.S|U.S)$:

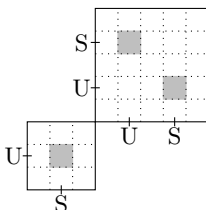


FIGURE 2

Les parties grisées sont les états interdits dus au fait que les opérations U et S ne sont pas indépendantes. Le point d'intersection entre les deux carrés représente la synchronisation.

La motivation est d'étudier ces systèmes (plusieurs processus se synchronisant en temps continu) en explorant la géométrie de l'espace qu'ils induisent. Un moyen d'abstraire cette géométrie se fait grâce à la réalisation géométrique d'un ensemble pré-cubique.

Définition 1. Un *ensemble pré-cubique* est un ensemble gradué $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec des fonctions pour i dans $\{1, \dots, n\}$ et α dans $\{0, 1\}$, $\delta_{i,n}^\alpha : X_n \rightarrow X_{n-1}$ (faces) vérifiant

$$\text{pour } 1 \leq i < j \leq n, \delta_{i,n}^\alpha \circ \delta_{j,n+1}^\beta = \delta_{j-1,n}^\beta \circ \delta_{i,n+1}^\alpha$$

Exemple 1. $X_0 = \{x_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$ $X_1 = \{a_{12}, a_{13}, a_{24}, a_{34}\}$ $X_2 = \{c\}$ $\forall i > 2, X_i = \emptyset$
 $\delta_{1,1}^0(a_{ij}) = x_i$ $\delta_{1,1}^1(a_{ij}) = x_j$ $\delta_{1,2}^0(c) = a_{12}$ $\delta_{2,2}^0(c) = a_{13}$ $\delta_{1,2}^1(c) = a_{34}$ $\delta_{2,2}^1(c) = a_{24}$
est un ensemble pré-cubique.

Géométriquement, nous aimerions dire que c'est un carré, que nous le dessinerions comme le carré :

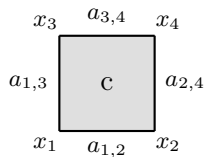


FIGURE 3

De manière générale, nous voudrions voir géométriquement un ensemble pré-cubique comme un recollement d'hypercubes. Ceci peut être formalisé par la notion de réalisation géométrique.

Définition 2. Soit $\square_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n, 0 \leq t_i \leq 1\}$ le n -cube unité dans \mathbb{R}^n . On définit pour $\alpha \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$, $\rho_{i,n}^\alpha : \square_n \rightarrow \square_{n+1}$ par :

$$\rho_{i,n}^\alpha(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{i-1}, \alpha, t_i, \dots, t_n)$$

Soit X , un ensemble pré-cubique. On note $R(X) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \square_n$, l'espace topologique construit comme l'union disjointe (avec la topologie union disjointe) du produit (muni de la topologie produit) de X_n (muni de la topologie discrète) et de \square_n .

La *réalisation géométrique* $Geom(X)$ de X est le quotient de $R(X)$ par la plus petite relation d'équivalence \equiv telle que :

$$\forall \alpha \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, x \in X_n, t \in \square_{n-1}, (\delta_{i,n}^\alpha(x), t) \equiv (x, \rho_{i,n-1}^\alpha(t))$$

muni de la topologie quotient.

Cette dernière relation est le recollement des hypercubes, identifiant un bord (l'image d'un $\rho_{i,n}^\alpha$) de deux n -cubes géométriques (copies de \square_n) lorsqu'ils sont la réalisation de deux n -cubes algébriques (éléments de X_n) ayant une face (l'image d'un $\delta_{i,n}^\alpha$) en commun.

Par exemple, l'espace provenant du PV-programme de la figure 1 est (à homéomorphisme près), la réalisation géométrique d'un ensemble pré-cubique avec X_0 de cardinal 16 (les points d'intersections des segments pointillés ou pleins), X_1 de cardinal 24 (les segments pointillés ou pleins), X_2 de cardinal 8 (les carrés non grisés), les autres X_n vides et la fonction face δ_1^0 (resp. $\delta_1^1, \delta_2^0, \delta_2^1$) associe à un carré, sa face du bas (resp. du haut, de gauche, de droite). Autre exemple, l'ensemble pré-cubique décrit dans l'exemple 1 a pour réalisation géométrique un carré.

Les ensembles pré-cubiques sont à la base des automates de dimension supérieure (HDA) introduits par Pratt dans [Pra91]. Ce sont des ensembles pré-cubiques dont les éléments de dimension 1 sont munis d'étiquettes et dont l'étiquetage des arêtes d'un élément de dimension 2 doit vérifier :

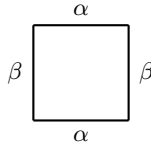


FIGURE 4

où α et β sont des étiquettes. Il faut comprendre ici que l'on a deux processus, l'un qui effectue une action α , l'autre une action β et que le carré (un élément de dimension 2) représente le fait que ces deux actions sont indépendantes et peuvent donc s'exécuter simultanément. De manière générale, un élément de dimension n représente le fait que n processus effectuent des actions indépendantes.

Dans un premier temps, seule la géométrie du flot de contrôle de nos systèmes nous intéresse (dans un deuxième temps, il sera possible de traiter l'étiquetage de façon algébrique, comme des morphismes d'ensembles cubiques, vers un ensemble cubique d'étiquetage [GM12, Gou02], cela permettra d'utiliser nos méthodes homologiques, fonctorielles par nature). Nous n'étudierons donc que les ensembles pré-cubiques et non les HDA. Cependant, dans un HDA, les éléments de dimension 1 de l'ensemble pré-cubique sous-jacent sont des transitions avec une source (représentée par $\delta_{1,1}^0$) et une cible (représentée par $\delta_{1,1}^1$) et sont donc orientés. De manière générale, les éléments de dimension supérieure sont orientés par leurs arêtes. Nous aimerions conserver cette idée dans notre étude des ensembles pré-cubiques, mais les espaces topologiques comme la réalisation géométrique n'ont pas de notion d'orientation. C'est pourquoi nous n'abstrairons pas la représentation géométrique d'un ensemble pré-cubique par un espace topologique mais par un analogue dirigé. Dans ce rapport, nous considérerons des pospaces :

Définition 3 ([Nac65]). Soit \leq , un ordre partiel (relation réflexive, transitive et antisymétrique) sur X , un espace topologique. On dit que (X, \leq) est un *pospace* si \leq , vu comme un sous-espace de $X \times X$, est fermé.

Ils nous permettront d'étudier les PV-programmes et les SU-programmes et plus généralement les ensembles pré-cubiques sans boucle (ie. sans suite x_1, \dots, x_n d'éléments de dimension 1 telle que $\delta_{1,1}^1(x_1) = \delta_{1,1}^0(x_2), \dots, \delta_{1,1}^1(x_{n-1}) = \delta_{1,1}^0(x_n)$ et $\delta_{1,1}^1(x_n) = \delta_{1,1}^0(x_1)$). Nous aurions pu considérer des formalismes plus généraux (comme les local pospaces [FGR06], d-spaces [Gra09], streams [Kri09]), mais par un souci de présentation nous nous limiterons aux pospaces ici, l'essentiel des résultats présentés ici pouvant s'étendre à ces espaces plus généraux.

3 Contexte général

Nous présentons ici quelques travaux existants en topologie algébrique et topologie algébrique dirigée. Nous commençons par la notion d'homotopie et de son analogue dirigée la dihomotopie (section 3.1). Puis, nous présenterons la notion d'homologie en topologie algébrique (section 3.2). Nous en listerons des propriétés que nous aimerions retrouver dans un analogue dirigé. Puis, nous verrons les tentatives passées de définition de dihomologie (section 3.3).

3.1 Homotopies

Comme les HDA, on peut comprendre un pospace en terme de systèmes concurrents. Un point correspond à un état du système, un chemin croissant à une exécution. Formellement :

Définition 4. Soient X un espace topologique, $a, b \in X$. Un *chemin de a vers b* est une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Si de plus X est un pospace, un *dichemin de a vers b* est un chemin de a vers b croissant (en munissant $[0, 1]$ de l'ordre usuel).

Nous avons également une notion de composition séquentielle qui n'est autre que la concaténation des chemins :

Définition 5. Soient f un (di)chemin de a vers b et g un (di)chemin de b vers c . On définit la *concaténation* $f \star g : [0, 1] \rightarrow X$ par : pour tout $t \in [0, 1/2]$, $(f \star g)(t) = f(2t)$ et pour tout $t \in [1/2, 1]$, $(f \star g)(t) = g(2t - 1)$. C'est un (di)chemin de a vers c .

Exemple 2. On reprend l'exemple de la section précédente. Avec l'ordre produit, le chemin du dessus est un dichemin alors que celui du bas non.

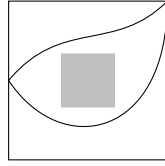


FIGURE 5

Il manque néanmoins un moyen de caractériser l'indépendance des actions comme les cellules de dimension supérieure le faisaient dans les HDA. En topologie algébrique, nous avons une notion d'équivalence entre les chemins qui nous permet de considérer les chemins modulo déformations continues. C'est la notion d'homotopie.

Définition 6. Soient X un espace topologique (resp. un pospace), f et g des chemins (resp. dichemins) de a vers b . Une homotopie (resp. dihomotopie) de f à g est une fonction continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ (resp. et croissante en munissant $[0, 1] \times [0, 1]$ de l'ordre $= \times \leq$ i.e. croissante en la deuxième coordonnée) telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $H(0, t) = f(t)$, $H(1, t) = g(t)$, $H(t, 0) = a$ et $H(t, 1) = b$. On dit que f est homotope (resp. dihomotope) à g . C'est une relation d'équivalence sur les chemins (resp. dichemins) qui est compatible avec la concaténation (dans le sens où, si f est (di)homotope à g , h est (di)homotope à k et f et h sont concaténables alors $f \star h$ est (di)homotope à $g \star k$).

Cette définition dit que l'on a un chemin de f vers g dans l'espace des (di)chemins de a vers b ou plus simplement que l'on peut déformer continûment f en g tout en restant un (di)chemin de a vers b .

Exemple 3. Dans l'exemple 2, les chemins ne sont pas homotopes. Dans les deux suivants, les dichemins sont dihomotopes dans le premier et non (di)homotopes dans le second. En fait, dans cet espace homotopie et dihomotopie entre dichemins coïncident, ce qui n'est pas vrai en général (nous en verrons un exemple en section 3.3).

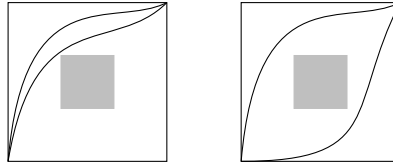


FIGURE 6

Nous résumons toutes ces informations dans une même structure, la catégorie fondamentale :

Définition 7 ([Bro06, Gra03, Gou03]). Soit X un espace topologique (resp. un pospace). On définit la catégorie fondamentale $\pi_1(X)$ (resp. $\vec{\pi}_1(X)$) par :

- les objets sont les points de X
- les morphismes de a vers b sont les classes d'homotopie (resp. de dihomotopie) de chemins (resp. dichemins) de a vers b
- la composition $[g] \circ [f]$ (où $[g]$ est la classe de (di)homotopie de g) est définie par $[f \star g]$
- l'identité de a est la classe du (di)chemin constant en a

En réalité, $\pi_1(X)$ (mais pas $\vec{\pi}_1(X)$) est un groupoïde, ie. une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Cela revient à dire que tout chemin a un inverse modulo homotopie. Cet inverse n'est autre que le chemin obtenu en inversant le temps (ce que l'on ne veut justement pas dans un monde dirigé). C'est pourquoi on appelle $\pi_1(X)$ groupoïde fondamental.

Nous avons pris le parti de définir simultanément ces notions dans un espace topologique (provenant de la théorie non dirigée de la topologie algébrique, voir par exemple [Hat02]) et dans un pospace (cadre dirigé, voir par exemple [Gra07]), quand bien même seul ce dernier cadre nous intéresse. La théorie de la topologie algébrique nous sert de fil conducteur dans notre étude, notre but final durant ce stage étant de définir un analogue d'une notion classique en topologie algébrique : l'homologie.

Mais avant de nous tourner vers celle-ci, intéressons-nous d'abord aux utilisations de cette catégorie fondamentale en informatique et notamment dans l'étude de nos systèmes concurrents. Cette catégorie fondamentale est beaucoup

trop grosse (infinie en générale) pour être manipulée directement. Néanmoins, dans des cas simples, l'information intéressante est finie. Ce sera le cas notamment des PV-programmes. Au lieu d'indexer la catégorie fondamentale par les points, on va l'indexer par les zones dans lesquelles les états des processus sont les mêmes. Nous appellerons ces zones *composantes*. Par exemple, reprenons le PV-programme $P(a).V(a)|P(a).V(a)$. Intuitivement, il y a 4 composantes : 1) aucun des processus n'a encore eu accès à a 2) le processus horizontal a eu accès à a avant le vertical 3) le vertical avant l'horizontal 4) tous les processus ont rendu l'accès, ce qui géométriquement correspond à :

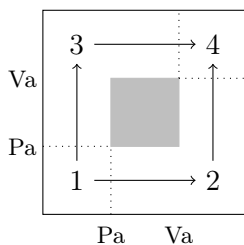


FIGURE 7

La *catégorie de composantes* qui résumera ceci sera le carré $(1, 2, 3, 4)$ dont les sommets sont les composantes. Cette catégorie (pour une définition formelle voir [GH07]) doit être un invariant pour ce qui serait pour nous une équivalence entre systèmes. On peut la rapprocher de l'ensemble des composantes connexes (par arcs) d'un espace topologique. Un exemple plus subtil est le suivant : prenons le drapeau suisse (ou les deux philosophes qui dinent) $P(a).P(b).V(b).V(a)|P(b).P(a).V(a).V(b)$ avec a et b des sémaphores distinctes d'arité 1. On voit ici apparaître des zones non sûre (ou qui amène inévitablement à un point mort, composante 4) et inatteignable (composante 7). On aura ici 10 composantes comme suit :

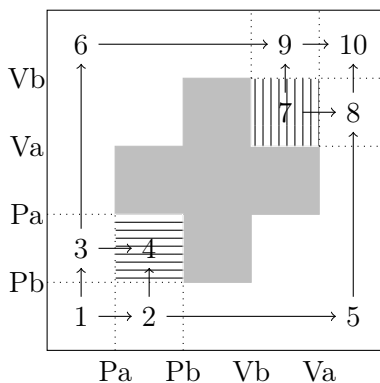


FIGURE 8

Par exemple, la composante 3 est distinguée de la composante 1 par le fait que le processus vertical ait pris ou non l'accès du sémaphore b . Ces deux exemples ne sont pas équivalents, car ils n'ont pas les mêmes composantes (ce que la topologie algébrique ne pouvait pas détecter). De manière générale, cette catégorie de composantes est calculable (EXPTIME en général [GH05], conjecturalement PTIME dans le cas des sémaphores d'arité 1) lorsque le pospace est la réalisation géométrique d'un PV-programme et peut être utilisée dans la détection de dead-locks ou de manière générale à la vérification [FGR98, GR02, GH05, BCC⁺11].

En topologie algébrique, les topologues utilisent plus volontiers ce que l'on appelle le *groupe fondamental*. C'est le groupe des morphismes $\pi_1(X)(x, x)$ pour un x fixé et on peut le voir comme une information locale, là où le groupoïde est global. On le note $\pi_1(X, x)$. Il dépend de x , mais pour deux points x et x' dans la même composante connexe, $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, x')$ sont isomorphes. Dans le cas d'une présentation finie de nos espaces, on peut en calculer une présentation finie, il a une théorie bien développée (voir [Hat02]). Cependant, vérifier si deux groupes fondamentaux sont isomorphes est un problème indécidable (réduction du problème du mot dans les groupes). De même, tester si un groupe fondamental est trivial l'est aussi (donc en particulier la simple connexité aussi).

Tous ces objets sont censés être des invariants de nos espaces. Mais nous n'avons pas encore dit quelle relation d'équivalence nous voulions utiliser. Intuitivement, on voudrait que cela soit lié à l'idée que les espaces doivent être

égaux à déformation près. Dans le cas classique, c'est la notion d'équivalence d'homotopie (dont l'origine est le problème de classification des espaces, comme celui des variétés compactes, modulo homéomorphisme, voir par exemple la conjecture de Poincaré) :

Définition 8. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues. On dit que f et g sont *homotopes* et on note $f \sim g$ s'il existe $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue telle que pour tout $x \in X$, $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$.

On dit que X et Y , deux espaces topologiques, sont *homotopiquement équivalents* s'il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$.

Comme annoncé, si deux espaces sont homotopiquement équivalents, leurs groupoïdes fondamentaux sont équivalents (au sens des catégories, voir [Bor94a]) et leurs groupes fondamentaux isomorphes.

Exemple 4. Un cercle et un plan privé d'un point sont homotopiquement équivalents (ce qui montre que cette notion est différente de l'homéomorphie). Par exemple, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ $re^{i*\theta} \mapsto e^{i*\theta}$ et $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'inclusion, vérifient les conditions de la définition 8. Leur groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} .

Toute boule est homotopiquement équivalente à un point. Leur groupe fondamental est trivial. En particulier, un cercle n'est pas homotopiquement équivalent à un point. De manière générale, une sphère n'est pas homotopiquement équivalente à un point. Or, toute sphère de dimension ≥ 2 a un groupe fondamental trivial.

Le groupe fondamental ne suffit pas à caractériser l'équivalence d'homotopie. Il ne regarde que ce qui se passe en dimension 1. On peut définir de façon analogue des groupes qui regardent ce qui se passe en dimension n , ce sont les groupes d'homotopie (voir [Hat02] pour leur définition formelle et leur théorie), on les note $\pi_n(X, x)$. Ce sont des invariants de l'équivalence d'homotopie qui la caractérisent de manière exacte pour une classe d'espaces assez générale. Néanmoins, ils restent très difficiles à calculer (le calcul des groupes d'homotopie des sphères est un problème non complètement résolu à ce jour).

3.2 Théorie de l'homologie classique

Le but de cette section est de présenter rapidement la théorie de l'homologie en topologie algébrique classique afin de motiver la définition d'une notion analogue dans un cadre dirigé. Pour une étude plus en détail voir [Hat02] entre autres. Le problème principal du groupoïde fondamental (ou des groupes d'homotopie) est qu'il n'est pas calculable en général même lorsque l'espace est finiment présenté (par exemple, par un ensemble simplicial ou cubique). On aimerait donc un objet calculable dans le cas fini, qui soit invariant par l'équivalence d'homotopie.

3.2.1 Définitions et exemples

L'homologie est une technique générale pour mesurer le défaut d'exactitude d'une suite de morphismes. Nous développerons rapidement ici la théorie de l'homologie dans les groupes abéliens (nous verrons plus tard un cadre plus général) et son application à la topologie algébrique. La notion de suite exacte est importante en algèbre car beaucoup de propriétés peuvent se définir à partir de celle-ci. Formellement,

Définition 9. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des morphismes de groupes abéliens. On dit que la suite :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est *exacte* si $Im(f) = Ker(g)$.

On dit qu'elle est *exacte courte* si, de plus, f est injective et g est surjective.

On dit que la suite de morphismes de groupes :

$$\dots \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0$$

est *exacte longue* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite :

$$A_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n$$

est exacte.

Comme nous l'avons dit, nous allons étudier le défaut d'exactitude de suite de morphismes :

Définition 10. Un *complexe de chaînes* est une suite $C = (\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de morphismes de groupes abéliens tels que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, c'est-à-dire $Im(\partial_{n+1}) \subseteq Ker(\partial_n)$.

Pour $n \geq 1$, $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$ est exacte ssi le groupe quotient $Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$ est trivial. On va donc prendre comme mesure de non-exactitude de cette suite ce groupe quotient que l'on appellera *n-ième groupe d'homologie de groupes* et que l'on notera $H_n^g(C)$. Par convention, $H_0^g(C) = C_0/Im(\partial_1)$.

Un morphisme de complexes de chaînes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\partial'_{n+1} : C'_{n+1} \rightarrow C'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de morphismes de groupes $(f_n : C_n \rightarrow C'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$. $H_n^g((f_k)_{k \in \mathbb{N}}) : H_n^g(C) \rightarrow H_n^g(C')$ [x] \mapsto [$f_n(x)$] (où [x] est la classe de $x \in Ker \partial_{n-1}$ dans $H_n^g(C)$) est bien définie et rend H_n^g fonctorielle.

En topologie algébrique, on étudie la géométrie d'un objet à travers l'homologie d'un complexe de chaînes particulier. Ici, nous avons deux types d'objets : les espaces topologiques et les ensembles pré-cubiques, liés grace à la réalisation géométrique. On peut définir des complexes de chaînes associés à chacun :

Définition 11.

- Soit X un espace topologique. Un *n-simplexe singulier* de X est une fonction continue du n -simplexe standard Δ_n dans X , où le *n-simplexe standard* est le sous-espace de $[0, 1]^{n+1}$ défini par $\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \mid \sum t_i = 1\}$. Le i -ième bord d'un n -simplexe σ ($i \leq n$) est le $n-1$ simplexe $\partial_{i,n}(\sigma)$ qui a (t_0, \dots, t_{n-1}) associe $\sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n)$. On définit alors le *complexe singulier* $C(X)$ de X comme :
 - pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les n -simplexes de X
 - pour $n \geq 1$, $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{i,n}$ où $\partial_{i,n}$ est étendue linéairement sur $C_n(X)$
 L'homologie de groupes de $C(X)$ est appelée *homologie singulière* de X et est notée $H_*(X)$.
- Le complexe de chaînes $C(X)$ associé à un ensemble pré-cubique X est défini par :
 - pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ est le groupe abélien libre engendré par X_n
 - pour $n \geq 1$, $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\delta_{i,n}^1 - \delta_{i,n}^0)$ où les $\delta_{i,n}^\alpha$ sont étendus linéairement sur $C_n(X)$
 L'homologie de groupes de $C(X)$ est appelée *homologie cubique* de X et est notée $H_*(X)$.

De plus, C et H_n sont des foncteurs.

En réalité, ces deux notions sont les mêmes dans le sens où les groupes d'homologie d'un ensemble pré-cubique sont isomorphes aux groupes d'homologie singulière de sa réalisation géométrique [Mas80, Jar02]. On pourra donc naviguer entre ces deux points de vue suivant le contexte.

Exemple 5. Nous allons maintenant illustrer l'homologie par des exemples. Commençons par dessiner les premiers simplexes standards :

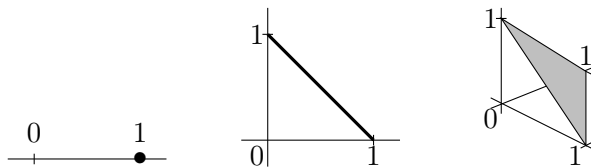


FIGURE 9

À la dimension suivante, on a un tétraèdre. Intuitivement, l'homologie calcule le nombre de trous de l'espace en chaque dimension. Par exemple, un espace a un trou de dimension 1, s'il existe un cycle (par exemple, le bord d'un triangle, en tout cas, quelque chose qui n'a pas de bord) ne peut être rempli (par exemple, il manque un point à l'intérieur du triangle). Par exemple, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a un trou de dimension 1 car on peut entourer 0 par le bord d'un triangle que l'on ne pourra pas remplir. De manière analogue, une n -sphère a un trou de dimension n . En terme d'homologie, cela signifie que le n -ième groupe d'homologie a un générateur. Nous pouvons même montrer qu'il est isomorphe à \mathbb{Z} . Nous le faisons en annexe A de deux façons différentes pour illustrer les moyens de calculer l'homologie.

Dans la suite de cette section, nous listons des propriétés de l'homologie.

3.2.2 Invariance par homotopie

Le théorème d'invariance par homotopie est un résultat de correction de l'homologie :

Théorème 1 ([Hat02]). *Si X et Y sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents alors pour tout $n \geq 0$, $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ sont isomorphes.*

3.2.3 Théorèmes d'Hurewicz et de Whitehead

Inversement, l'homologie est suffisamment proche de l'homotopie :

Théorème 2 (Hurewicz [Hat02]). *Soit X , un espace topologique. Alors :*

- $H_0(X)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^p où p est le nombre de composantes connexes de X .
- si X est $(n-1)$ -connexe, ie. pour tout $1 \leq i \leq n-1$, pour tout $x \in X$, $\pi_i(X, x)$ est trivial et $\pi_0(X)$ est un singleton, alors :
 - si $n = 1$, $H_1(X)$ est isomorphe à l'abélianisé de $\pi_1(X)$
 - sinon, $H_n(X)$ et $\pi_n(X)$ sont isomorphes.

De plus, ces isomorphismes sont naturels en X .

Théorème 3 (Whitehead, [Spa94]). *Soient X et Y , deux espaces qui sont la réalisation géométrique d'ensemble pré-cubiques et qui sont simplement connexes (ie. 1-connexe). Alors, si $f : X \rightarrow Y$ induit un isomorphisme en homologie, ie. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme alors X et Y sont homotopiquement équivalents.*

3.2.4 Préservation des suites exactes et modularité

On entend par modularité tout résultat qui permet de relier l'homologie d'un espace à partir d'espace plus petits. Comme nous allons l'expliquer, l'homologie est modulaire. Nous pouvons exprimer l'homologie d'un espace à partir de celle d'un recouvrement par exemple. Les résultats de modularité de l'homologie se démontrent à partir d'un résultat général de préservation des suites exactes par l'homologie.

Définition 12. On dit qu'une suite de morphismes de complexes de chaînes :

$$A \xrightarrow{(f_n)_{n \in \mathbb{N}}} B \xrightarrow{(g_n)_{n \in \mathbb{N}}} C$$

est exacte si pour tout n , la suite de morphismes de groupes :

$$A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n$$

l'est.

De plus, on dit qu'elle est exacte courte si les f_n sont injectifs et les g_n surjectifs.

Théorème 4 ([Hat02]). *Si*

$$A \xrightarrow{(f_n)_{n \in \mathbb{N}}} B \xrightarrow{(g_n)_{n \in \mathbb{N}}} C$$

est une suite exacte courte de complexes de chaînes alors il existe une suite exacte longue de groupes de la forme :

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n B \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

On en déduit en particulier :

Théorème 5 (Mayer-Vietoris [Hat02]). *Soient $A, B \subseteq X$ des espaces topologiques tels que l'union des intérieurs de A et B recouvre X . Alors, il existe une suite exacte longue de groupes de la forme :*

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n B \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

Ce théorème permet de calculer l'homologie d'un espace lorsque l'on connaît l'homologie d'un recouvrement. On en donne une illustration en annexe A.

3.2.5 Calculabilité

L'homologie se distingue de l'homotopie par le fait qu'étant donné un ensemble pré-cubique fini, nous pouvons calculer une présentation canonique. En effet, les groupes d'homologie étant des groupes abéliens de type fini, ils sont isomorphes à un unique groupe de la forme $\mathbb{Z}^\beta \times \mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/\alpha_k\mathbb{Z}$ avec $2 \leq \alpha_1 | \dots | \alpha_k$ (où $a|b$ signifie a divise b). Il est alors facile, étant donné $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ de tester si de tels groupes sont isomorphes. De plus, ces entiers sont calculables lorsque les $\delta_{i,n}^\alpha$ sont donnés sous forme de matrices. Cela s'effectue en calculant la forme normale de Smith des ∂_n , calculés à partir des $\delta_{i,n}^\alpha$. Nous présentons et illustrons cet algorithme en annexe A.

L'homologie est donc un outil intéressant dans l'étude de l'homotopie. C'en est un invariant proche calculable. Le but de ce stage est de développer une théorie analogue dans un cadre dirigé.

3.3 Tour d'horizon des tentatives d'homologies dirigées

Depuis [Gou95], des tentatives de définition d'homologie dirigée ont été engagées, sans toutefois aboutir à un candidat totalement satisfaisant. D'un point de vue théorique, une homologie dirigée est satisfaisante si elle vérifie quatre propriétés, analogues dirigées de propriétés de l'homologie que nous avons évoquées :

- propriété A : la dihomotopie est plus fine que la dihomologie, c'est-à-dire un résultat de correction. L'idéal serait un analogue de l'invariance par homotopie.
- propriété B : la dihomologie n'est pas beaucoup moins fine que la dihomotopie, un analogue du théorème d'Hurewicz par exemple. Cela demande en particulier d'éviter le problème suivant : considérons l'ensemble pré-cubique suivant :

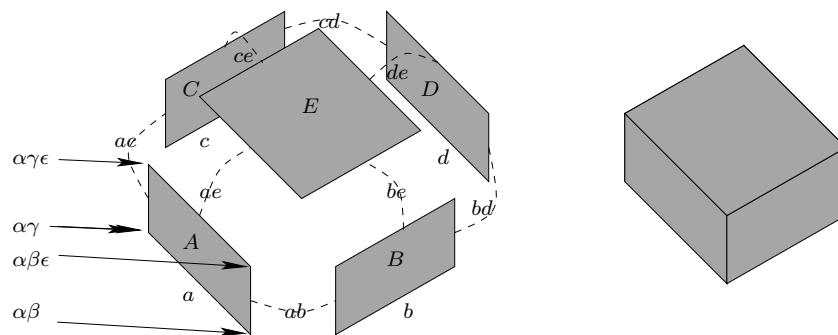


FIGURE 10

C'est un cube d'intérieur vide auquel on a enlevé la face du bas. Sa réalisation géométrique est munie de l'ordre du bas vers le haut et du premier plan vers le fond, ce qui fait d'elle un pospace. Nous l'appellerons boîte d'allumettes. C'est une simplification du problème que possède le PV-programme :

$$P(a).P(b).V(a).P(c).V(b).V(c) | P(b).V(b) | P(a).P(b).V(a).P(c).V(b).V(c)$$

où a et c sont d'arité 1 et b d'arité 2. Dans ces deux exemples, la dihomotopie et l'homotopie entre dichemins ne coïncident pas. En effet, $a \star c$ et $b \star d$ sont homotopes mais pas dihomotopes. Ils sont homotopes car il suffit de passer par dessus, en passant par les chemins (qui ne sont pas des dichemins) $ab \star ae \star ce \star cd$ puis $ab \star be \star de \star cd$. Ils ne sont pas dihomotopes car la seule façon de passer continûment de l'un à l'autre est de passer par dessus justement. Mais cela oblige à passer par E et donc par un chemin qui descend de E vers d et qui ne peut donc pas être un dichemin. On aimerait pouvoir observer sur la dihomologie de la boîte d'allumettes qu'il y a des dichemins non dihomotopes, en montrant par exemple qu'elle ne correspond pas à l'homologie dans ce cas.

- propriété C : La dihomologie est modulaire. Un bon point de départ serait un analogue du théorème de préservation des suites exactes.
- propriété D : Tester si deux dihomologies sont équivalentes (pas nécessairement isomorphes, comme par exemple l'équivalence de catégories) est décidable au moins dans le cas de PV-programmes ou SU-programmes.

Parmi les tentatives, nous pouvons citer :

- les homologies de branchement, de confluence et totale de [Gou95]. Elles permettent d'étudier des propriétés géométriques dans les HDA. Elles sont calculables dans le cas de HDA finis. La propriété B échoue car, par exemple, l'homologie totale est essentiellement invariante par homotopie.
- l'homologie dirigée de [Gra04]. Elle se construit en munissant chaque groupe d'homologie d'un ordre. Si on se rappelle que les générateurs des groupes d'homologie sont les trous de l'espace, l'ordre reflète que, comme l'espace est ordonné, l'ensemble de ses trous l'est aussi. Elle est invariante par une notion analogue à l'équivalence d'homotopie. Comme la boîte d'allumettes est homotopiquement équivalente à un point, ses groupes d'homologie sont triviaux et donc sa dihomologie n'apporte rien de plus que l'homologie. La propriété B échoue donc.
- l'homologie dirigée de [Fah04]. Il en déduit une notion de dihomologie entre dichemins moins fine que la dihomotopie. Il montre en exemple que les dichemins $a \star c$ et $b \star d$ de la boîte d'allumettes sont dihomologues. La propriété B échoue donc.
- le graphe d'homologie de [Kah13]. L'idée est similaire à [Gra04], sauf que les groupes d'homologie sont munis de relations plus générales. Il est invariant par un analogue des homéomorphismes dans les ensembles pré-cubiques. Pour la même raison que l'homologie dirigée de [Gra04], la propriété B échoue.

4 Systèmes d'homologie

Nous présentons ici notre candidat de dihomologie, les systèmes d'homologie (nous en présentons un autre en annexe C). L'espace des traces entre deux points d'un pospace en sera un ingrédient essentiel, mais aussi les relations entre ceux-ci lorsque l'on prolonge ces traces (section 4.1). Il nous permet de définir trois structures : les systèmes de traces, d'homotopie et d'homologie. Nous développons deux points de vue intimement liés : l'un topologique (section 4.2), l'autre combinatoire (section 4.4). Nous en étudions les propriétés théoriques évoquées dans la section 3.3 : l'invariance par dihoméomorphisme (théorème 6), l'invariance par subdivision (section 4.4.3) pour la propriété A ; le théorème d'Hurewicz (théorème 7), la distinction entre homotopie et dihomotopie dans la boîte d'allumettes (section 4.4.4) pour la propriété B ; des résultats de préservation de suites exactes (théorèmes 8 et 10) pour la propriété C ; une méthode de calcul (section 4.4.4).

4.1 Traces dans un pospace

4.1.1 Espace des traces

Nous commençons par présenter l'espace des traces entre deux points d'un pospace. Nous avons dit précédemment que nous voyions les dichemins comme des exécutions. Pour être plus précis, ce sont des exécutions dans lequel on garde le temps que met les processus à effectuer leurs opérations. En réalité, ce qui nous intéresse vraiment est l'enchaînement des opérations. C'est pourquoi on considère les dichemins modulo reparamétrisation :

Définition 13 ([Rau09]). Une *reparamétrisation croissante* est une fonction continue croissante surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Soient X un pospace et p et q deux dichemins de a vers b dans X . p se reparamétrise en q s'il existe une reparamétrisation croissante γ telle que $p \circ \gamma = q$. La *trace* de p , notée $\langle p \rangle$ est la classe d'équivalence modulo la clôture symétrique transitive de la relation de reparamétrisation.

La trace d'un dichemin est le dessin du dichemin, là où le dichemin lui-même est la façon de le dessiner. On remarque que deux dichemins équivalents modulo reparamétrisation sont dihomotopes. Nous munissons l'ensemble de traces entre deux points d'une topologie :

Définition 14 ([Rau09]). Soient X un pospace et a et $b \in X$. On munit l'ensemble des traces de dichemins de a vers b , noté $\vec{\mathcal{T}}(X)(a, b)$, de la topologie compacte-ouverte (topologie de la convergence uniforme sur tout compact si X est métrique) sur l'ensemble des dichemins de a vers b quotientée par la relation de reparamétrisation. On l'appelle *espace des traces de X entre a et b* .

L'espace des traces est intéressant dans l'étude des systèmes concurrents : deux traces appartenant à la même composante connexe représentent deux exécutions qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les actions indépendantes s'effectuent. Il a aussi de bonnes propriétés théoriques (étudiées par exemple dans [Rau09]) mais également calculatoires. En effet, étant donné un PV-programme (ou plus généralement, un hypercube privé d'un nombre fini de cubes

homothétiques), il est possible de calculer une représentation finie de l'espace des traces entre deux points [Rau10]. Cette construction est généralisée aux ensembles pré-cubiques non self-linked et sans boucle [Rau12]. Il peut être utilisé pour l'analyse statique de PV-programmes et étendu aux boucles [FGH⁺12].

4.1.2 Points fixés vs points qui varient

L'espace des traces entre deux points d'un pospace est une observation intéressante sur cet espace. Cependant, se limiter à l'espace des traces uniquement qu'entre deux points n'est pas suffisant pour classifier les SU-programmes à partir de leur géométrie. Illustrons ceci sur ces deux SU-programmes :

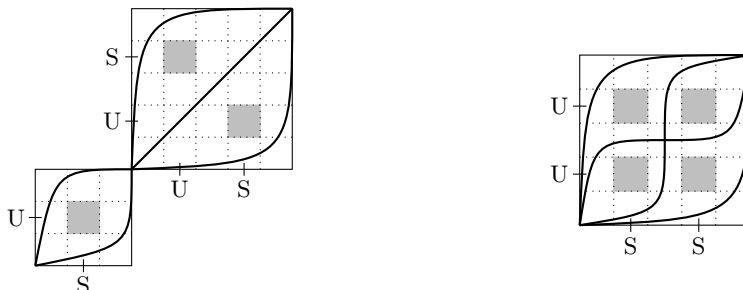


FIGURE 11

Chacun des deux pospaces associés ont un espace des traces entre leur points extrémaux homotopiquement équivalent à six points. Informatiquement parlant, ces deux SU-programmes ont six exécutions non équivalentes. Cependant, ces SU-programmes ne sont pas équivalents. En effet, les observations possibles sont différentes dans ces deux exemples. Dans celui de droite, le processus vertical peut effectuer ses deux opérations U avant que le processus horizontal n'effectue sa première opération S. Lorsqu'il effectuera ses deux opérations S, il observera à chaque fois, dans la mémoire du processus vertical, la valeur que celui-ci donne lors de sa deuxième opération U. Ceci ne peut pas arriver dans le SU-programme de gauche. En effet, à cause de la synchronisation, le processus horizontal est obligé d'effectuer sa première opération S avant que le processus horizontal ne puisse effectuer sa deuxième opération U.

Dans la suite, nous étudierons une structure qui nous permettra de regarder tous les espaces des traces entre deux points d'un pospace, et comment ceux-ci varient lorsque l'on fait bouger ces points. Plus précisément, on va :

- organiser les traces suivant la relation de prolongement. Cela reviendra à considérer la *catégorie de factorisation* de la *catégorie des traces*.
- associer à chaque trace l'espace des traces entre ses extrémités et à chaque prolongement un morphisme entre les espaces des traces associés. Cela reviendra à construire un foncteur de la catégorie de factorisation de la catégorie des traces dans la catégorie des espaces topologiques. C'est un cas particulier de *systèmes naturels*.
- composer ceci avec l'homotopie et l'homologie. Ce seront nos notions de dihomotopie et dihomologie.

Toutes ces notions et constructions seront développées dans les sections suivantes.

Pouvoir observer tous les espaces des traces entre deux points permet de distinguer les deux exemples précédents. En effet, si on regarde l'espace des traces entre α et β dans l'exemple de gauche :

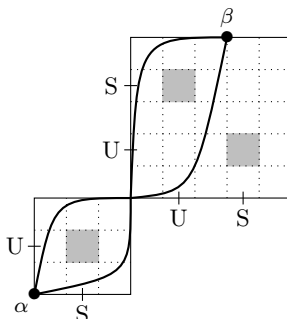


FIGURE 12

celui-ci est homotopiquement équivalent à quatre points. Or, aucun espace des traces entre deux points de l'exemple de droite ne l'est. Cela signifie que l'évolution des exécutions n'est pas la même dans ces deux programmes et que ceux-ci ne peuvent pas être équivalents.

4.1.3 Système de traces

Nous définissons ici formellement la structure évoquée précédemment qui nous permettra d'étudier tous les espaces des traces entre deux points d'un pospace et leurs relations, et en particulier toutes les notions non définies dans la sous-section précédente. Commençons par la *catégorie des traces* :

Définition 15. La *catégorie des traces de X* $\vec{\mathcal{T}}(X)$ est la catégorie dont :

- les objets sont les points de X
- les morphismes de a vers b sont les traces de dichemins de a vers b
- l'identité de a est la trace du dichemin constant en a
- la composition $\langle p' \rangle \circ \langle p \rangle$ avec p de a vers b et p' de b vers c est définie par $\langle p \star p' \rangle$

Un prolongement d'une trace $\langle p \rangle$ avec p de a vers b est un couple de traces $(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle)$ avec α de a' vers a et β de b vers b' . Comme les traces sont les morphismes de la catégorie des traces, considérer la catégorie de factorisation de $\vec{\mathcal{T}}(X)$ nous donne une structure nous permettant de coder les relations entre les espaces des traces :

Définition 16 ([BW85]). Soit \mathcal{C} une petite catégorie. La *catégorie de factorisation FC* de \mathcal{C} a pour objet les morphismes $a : \alpha \rightarrow \beta$ de \mathcal{C} et pour morphismes, les paires $(f, g) : a \rightarrow b, b : \alpha' \rightarrow \beta'$ avec $b = g \circ a \circ f$ que nous appellerons *prolongements* de a vers b .

Maintenant, on associe à chaque trace, l'espace des traces entre ses extrémités (pointé en cette trace) et à chaque prolongement un morphisme entre les espaces des traces. Cela revient à un prendre un foncteur de $F\vec{\mathcal{T}}(X)$ dans \mathbf{Top}_* , c'est-à-dire un *système naturel* de \mathbf{Top}_* sur $\vec{\mathcal{T}}(X)$:

Définition 17 ([BW85]). Soient \mathcal{C} une petite catégorie et \mathcal{M} une catégorie. Un système naturel de \mathcal{M} sur \mathcal{C} est un foncteur

$$D : FC \rightarrow \mathcal{M}$$

de la catégorie de factorisation de \mathcal{C} dans \mathcal{M} .

On peut alors définir notre structure, *le système des traces de X* :

Définition 18. \mathbf{Top}_* est la catégorie dont les objets sont les couples (X, x) où X est un espace topologique et $x \in X$ et les morphismes de (X, x) vers (Y, y) sont les fonctions continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(x) = y$.

Le *système de traces de X* $\vec{\mathcal{T}}(X)$ est le système naturel de \mathbf{Top}_* sur $\vec{\mathcal{T}}(X)$ qui :

- à chaque trace $\langle p \rangle$ avec p de a vers b associe $(\vec{\mathcal{T}}(X)(a, b), \langle p \rangle)$
- à chaque prolongement $(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle)$ de $\langle p \rangle$ (avec p de a vers b) vers $\langle p' \rangle$ (avec p' de a' vers b') associe la fonction continue de $\vec{\mathcal{T}}(X)(a, b)$ dans $\vec{\mathcal{T}}(X)(a', b')$ qui à $\langle q \rangle \in \vec{\mathcal{T}}(X)(a, b)$ associe $\langle \alpha \star q \star \beta \rangle$ (et qui envoie bien $\langle p \rangle$ sur $\langle p' \rangle$).

4.2 Systèmes d'homotopie et d'homologie

Nous présentons ici nos analogues dirigés aux notions de groupes d'homotopie et d'homologie. On commence par définir le système fondamental d'un pospace, analogue de la catégorie fondamentale. Puis, nous généralisons la construction aux dimensions supérieures (comme les groupes d'homotopie le sont au groupe fondamental) et à l'homologie pour définir notre candidat de dihomologie, les *systèmes d'homologie*.

Si on note $\vec{P}(X)(a, b)$, l'ensemble des dichemins de a vers b muni de la topologie compacte-ouverte, $\vec{P}(X)(a, b)$ est homotopiquement équivalent à $\vec{\mathcal{T}}(X)(a, b)$ sous certaines hypothèses sur X (par exemple si X est la réalisation digéométrique d'un ensemble pré-cubique, voir un peu plus loin et [Rau09]). Dans ce cas, l'ensemble des composantes connexes de $\vec{\mathcal{T}}(X)(a, b)$ est en bijection avec $\vec{\pi}_1(X)(a, b)$ l'ensemble des dichemins de a vers b modulo dihomotopie. Cela motive donc de regarder l'ensemble des composantes connexes des espaces des traces de X :

Définition 19. Soit \mathbf{Set}_* la catégorie dont les objets sont les couples (X, x) où X est un ensemble et $x \in X$ et les morphismes de (X, x) vers (Y, y) sont les fonctions $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(x) = y$.

On note $\pi_0 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Set}_*$ le foncteur qui à (X, x) associe le couple (ensemble des composantes connexes de X , composante connexe de x). On définit le *système fondamental de X* , noté $\overrightarrow{\mathbb{T}}_1(X)$, comme étant le système naturel de \mathbf{Set}_* sur $\overrightarrow{\mathcal{T}}(X) : \pi_0 \circ \overrightarrow{\mathbb{T}}(X)$.

Autrement dit, on associe à chaque trace l'ensemble des composantes connexes pointé en la composante de cette trace. Par la remarque précédente, le système fondamental a toutes les informations de la catégorie fondamentale. Mais contrairement à cette dernière (même si des pistes sont étudiées dans [Por14]), le système fondamental est facilement généralisable aux dimensions supérieures, comme les groupes d'homotopie le sont au groupe fondamental :

Définition 20. Soit \mathbf{Grp} la catégorie des groupes et morphismes de groupes.

Pour tout $n \geq 1$, on note $\pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ le foncteur qui à (X, x) associe le n -ième groupe d'homotopie $\pi_n(X, x)$. On définit le $(n+1)$ -ième *système d'homotopie*, noté $\overrightarrow{\mathbb{T}}_{n+1}(X)$, comme étant le système naturel de \mathbf{Grp} sur $\overrightarrow{\mathcal{T}}(X) : \pi_n \circ \overrightarrow{\mathbb{T}}(X)$.

mais aussi à l'homologie :

Définition 21. Soit \mathbf{Ab} la catégorie des groupes abéliens et morphismes de groupes.

Pour tout $n \geq 0$, on note $H_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur qui à (X, x) associe le n -ième groupe d'homologie singulière de X $H_n(X)$. On définit le $(n+1)$ -ième *système d'homologie*, noté $\overrightarrow{\mathbb{H}}_{n+1}(X)$, comme étant le système naturel de \mathbf{Ab} sur $\overrightarrow{\mathcal{T}}(X) : H_n \circ \overrightarrow{\mathbb{T}}(X)$.

4.3 Propriétés théoriques de ces systèmes

Nous en venons maintenant aux propriétés A, B, C et D évoquées dans la section précédente. Nous montrons ainsi l'invariance par dihoméomorphisme de nos constructions (propriété A), un théorème de Hurewicz (propriété B) et un théorème de préservation des suites exactes (propriété C). Les preuves sont reportées en annexe B. En ce qui concerne la calculabilité (propriété D), en général nos constructions sont infinies (et même continues), il n'y a donc pas d'espoir ici, ce qui motivera le passage à une définition discrète dans le cas d'un ensemble pré-cubique (section 4.4).

4.3.1 Functorialité des constructions, invariance par dihoméomorphisme

L'invariance par dihoméomorphisme, même si elle n'est pas aussi générale que l'invariance par homotopie en topologie algébrique non dirigée, permet en particulier de montrer que les réalisations digéométriques de subdivisions d'un ensemble pré-cubique ont des systèmes de traces, d'homotopie, d'homologie isomorphes. Cette invariance repose sur la functorialité de nos constructions : les dihoméomorphismes étant les isomorphismes dans la catégorie des pospaces et comme les foncteurs préservent les isomorphismes alors deux pospaces dihoméomorphes ont des systèmes isomorphes. Pour cela, il faut d'abord expliciter la catégorie des pospaces et celle des systèmes naturels :

Définition 22. On note \mathbf{PoTop} la catégorie des pospaces et fonctions continues croissantes. Les dihoméomorphismes sont les isomorphismes de cette catégorie c'est-à-dire les fonctions continues croissantes bijectives dont l'inverse est aussi continue croissante.

Pour les systèmes naturels, il reste à définir les morphismes. Nous n'utilisons pas la notion usuelle de morphismes entre systèmes naturels comme présentée dans [BW85], dans lequel ces systèmes sont utilisés pour définir de la cohomologie (notion duale à l'homologie) :

Définition 23. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' des petites catégories et \mathcal{M} une catégorie. Un *morphisme du système naturel* $\mathbb{D} : FC \rightarrow \mathcal{M}$ vers le système naturel $\mathbb{D}' : FC' \rightarrow \mathcal{M}$ est la donnée d'un couple (Φ, τ) où :

- $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur
- $\tau = (\tau_f)_{f \in \mathcal{C}} : \mathbb{D} \rightarrow \Phi^* \mathbb{D}'$ est un transformation naturelle c'est-à-dire pour tout f morphisme de \mathcal{C} , $\tau_f : \mathbb{D}(f) \rightarrow \mathbb{D}'(\Phi(f))$ est un morphisme de \mathcal{M} rendant le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(f) & \xrightarrow{\tau_f} & \mathbb{D}'(\Phi(f)) \\ \mathbb{D}(\alpha, \beta) \downarrow & & \downarrow \mathbb{D}'(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) \\ \mathbb{D}(g) & \xrightarrow{\tau_g} & \mathbb{D}'(\Phi(g)) \end{array}$$

commutatif pour tout (α, β) prolongement de f vers g .

Autrement dit, un morphisme de systèmes naturels est la donnée d'un foncteur entre les catégories sous-jacentes et d'un morphisme à chaque niveau rendant le tout naturel (au sens catégorique).

Définition 24. On note $\mathbf{SysNat}(\mathcal{M})$ la catégorie des systèmes naturels de \mathcal{M} sur n'importe quelle petite catégorie et morphismes de systèmes naturels.

L'identité de $\mathbb{D} : FC \rightarrow \mathcal{M}$ est $(id_{\mathcal{C}}, (id_{\mathbb{D}(f)})_{f \in \mathcal{C}})$ et la composition $(\Psi, \sigma) \circ (\Phi, \tau)$ est donnée par $(\Psi \circ \Phi, (\sigma_{\Phi(f)} \circ \tau_f)_f)$ (c'est-à-dire la composition niveau par niveau).

Proposition 1 (annexe B.1). $\overrightarrow{\mathbb{T}} : \mathbf{PoTop} \rightarrow \mathbf{SysNat}(\mathbf{Top}_*)$, $\overrightarrow{\mathbb{P}}_1 : \mathbf{PoTop} \rightarrow \mathbf{SysNat}(\mathbf{Set}_*)$, $\overleftarrow{\mathbb{P}}_{n+1} : \mathbf{PoTop} \rightarrow \mathbf{SysNat}(\mathbf{Grp})$ ($n \geq 1$) et $\overrightarrow{\mathbb{H}}_{n+1} : \mathbf{PoTop} \rightarrow \mathbf{SysNat}(\mathbf{Ab})$ ($n \geq 0$) sont des foncteurs.

Théorème 6. Toutes nos constructions sont invariantes par dihoméomorphisme ie. si deux pospaces sont dihoméomorphes alors leurs systèmes sont isomorphes.

4.3.2 Théorème de Hurewicz

La naturalité des isomorphismes du théorème de Hurewicz en topologie algébrique non dirigée permet d'étendre ce dernier à notre cadre. Formellement :

Définition 25. On note $Free : \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur qui à (X, x) associe le groupe abélien libre engendré par X et $Ab : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur qui à un groupe associe son abélianisé.

Cette terminologie provient de la théorie des catégories semi-exactes que l'on abordera en annexe :

Définition 26. On dit qu'un système naturel $\mathbb{D} : FC \rightarrow \mathbf{Grp}$ (resp. $\mathbb{D} : FC \rightarrow \mathbf{Set}_*$) est *nul* si pour tout morphisme f de \mathcal{C} , $\mathbb{D}(f)$ est un groupe trivial (resp. $\mathbb{D}(f)$ est de la forme $(\{*\}, *)$).

Théorème 7 (annexe B.2). Soient X un pospace et $n \geq 1$. Si pour tout $1 \leq k < n$, $\overrightarrow{\mathbb{P}}_k(X)$ est nul alors les systèmes naturels :

- si $n = 1$, $Free \circ \overrightarrow{\mathbb{P}}_1(X)$ et $\overrightarrow{\mathbb{H}}_1(X)$
- si $n = 2$, $Ab \circ \overrightarrow{\mathbb{P}}_2(X)$ et $\overrightarrow{\mathbb{H}}_2(X)$
- si $n > 2$, $\overrightarrow{\mathbb{P}}_n(X)$ et $\overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X)$

sont isomorphes.

4.3.3 Un théorème de préservation de suites exactes

Notre but ici est de démontrer un théorème de préservation de suites exactes comme dans le cas de l'homologie de groupes. Une étude générale a été faite dans [Gra91a, Gra91b], dans laquelle des conditions nécessaires et suffisantes sur la catégorie sur laquelle est définie l'homologie sont données pour qu'un tel théorème existe. On aimerait donc pouvoir utiliser cette étude à la catégorie $\mathbf{SysNat}(\mathbf{Ab})$. Cependant, cette catégorie ne vérifie pas toutes les conditions (cf. annexe B.4 pour une étude approfondie). Mais, étant donné un pospace X , tous les systèmes que nous avons construits sont définis sur la catégorie de factorisation de la même catégorie, la catégorie des traces. Or, si on fixe une petite catégorie, la catégorie des systèmes naturels de \mathbf{Ab} sur cette petite catégorie a beaucoup plus de propriétés et notamment vérifie les conditions de [Gra91b]. C'est ce que l'on développe ici. Fixons-nous une petite catégorie \mathcal{C} .

Définition 27. On note $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ la catégorie dont les objets sont les systèmes naturels de \mathbf{Ab} sur \mathcal{C} et dont les morphismes sont les morphismes de systèmes naturels de la forme $(id_{\mathcal{C}}, \tau)$ avec τ quelconque, que l'on notera simplement τ . La composition $\sigma \circ \tau$ est alors donnée par $(\sigma_f \circ \tau_f)_f$

Cette catégorie est abélienne (voir annexe B.3). On peut donc, comme dans les groupes abéliens, y parler de suites exactes, de complexes de chaînes et d'homologie, tout se définissant niveau par niveau :

Définition 28. Soit $\tau : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ un morphisme de $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$. On dit que τ est *injectif* (resp. *surjectif*, *nul*) si pour tout morphisme f de \mathcal{C} , τ_f est un morphisme de groupes injectif (resp. surjectif, nul).

Le *noyau* de τ est le système naturel $Ker \tau \in \mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ qui à f morphisme de \mathcal{C} associe $Ker \tau_f$ et qui à (α, β) prolongement de f vers g associe la restriction de $\mathbb{D}(\alpha, \beta)$ à $Ker \tau_f$.

De la même façon, on définit l'*image de τ* . On définit alors les suites exactes, exactes courtes, exactes longues comme dans les groupes.

On définit également comme dans les groupes les notions de complexes de chaînes, morphismes de complexes et suites exactes de complexes en remplaçant la condition $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ par $\partial_n \circ \partial_{n+1}$ est nul.

Un complexe de chaînes dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ peut se voir comme un système naturel de complexes de chaînes de groupes, c'est-à-dire pour chaque f morphisme de \mathcal{C} , on a un complexe de chaînes de groupes $(\partial_{n+1,f} : C_{n+1}(f) \rightarrow C_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$. On peut alors définir l'homologie de systèmes naturels comme étant la composée avec l'homologie de groupes :

Définition 29. Soit $C = (\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un complexe de chaînes dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$. Le p -ième système d'homologie de C , noté $H_p^{ns}(C)$ est le système naturel de $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ qui à f morphisme de \mathcal{C} associe $H_p^g((\partial_{n+1,f} : C_{n+1}(f) \rightarrow C_n(f))_{n \in \mathbb{N}})$ le p -ième groupe d'homologie de groupes du complexe de chaînes de groupes $(\partial_{n+1,f} : C_{n+1}(f) \rightarrow C_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et qui à (α, β) prolongement de f vers g associe $H_p^g((C_n(\alpha, \beta))_{n \in \mathbb{N}})$

Dans ce cadre, le théorème de préservation des suites exactes tient toujours :

Théorème 8 ([Gra91b]). *Pour chaque suite exacte courte de complexes de chaînes de $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$:*

$$U \xrightarrow{m} V \xrightarrow{p} W$$

il existe une suite exacte longue dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$:

$$\dots \longrightarrow H_n^{sn}(V) \xrightarrow{H_n^{sn}(p)} H_n^{sn}(W) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}^{sn}(U) \xrightarrow{H_{n-1}^{sn}(m)} H_{n-1}^{sn}(V) \longrightarrow \dots$$

naturelle en la suite exacte courte.

Il reste à faire le lien entre cette homologie de systèmes naturels et nos systèmes d'homologie. Celui-ci sera similaire au lien entre homologie de groupes et homologie singulière.

Définition 30. Pour tout $n \geq 0$, on note $C_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur qui à (X, x) associe le n -ième groupe du complexe singulier de X $C_n(X)$. On définit le n -ième système complexe singulier, noté $\vec{C}_n(X)$, comme étant le système naturel de \mathbf{Ab} sur $\vec{T}(X)$, $C_n \circ \vec{T}(X)$. On définit alors pour tout entier n , $\partial_{n+1} : \vec{C}_{n+1}(X) \rightarrow \vec{C}_n(X)$ le morphisme de systèmes de $\mathbf{SysNat}(\vec{T}(X), \mathbf{Ab})$ par pour toute trace $\langle p \rangle$ avec p de a vers b $\partial_{n+1, \langle p \rangle} : C_{n+1}(\vec{T}(X)(a, b)) \rightarrow C_n(\vec{T}(X)(a, b))$ est le ∂_{n+1} défini dans le complexe singulier de $\vec{T}(X)(a, b)$. Ceci fait de $(\partial_{n+1} : \vec{C}_{n+1}(X) \rightarrow \vec{C}_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ un complexe de chaînes de $\mathbf{SysNat}(\vec{T}(X), \mathbf{Ab})$.

Proposition 2. *Pour tout $n \geq 0$, $H_n^{ns}(\vec{C}(X))$ et $\vec{H}_{n+1}(X)$ sont égaux.*

4.4 Passage au discret

Comme nous l'avons dit, les systèmes naturels que nous avons définis ne sont pas calculables. On va s'intéresser ici à une classe de pospaces qui seront la réalisation géométrique d'un ensemble pré-cubique. On va donc commencer par définir un ordre sur les réalisations géométriques. Puis nous verrons comment nous pouvons définir des systèmes de traces, d'homotopie et d'homologie directement à partir d'un ensemble pré-cubique. Ces systèmes seront finis dès que l'ensemble pré-cubique est fini sans boucle. Nous verrons comment ceux-ci sont liés aux systèmes de la réalisation géométrique.

4.4.1 Réalisation digéométrique

Nous rappelons que la réalisation géométrique $Geom(X)$ d'un ensemble pré-cubique est le quotient de $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times [0, 1]^n$ par la plus petite relation d'équivalence \equiv telle que :

$$\forall \alpha \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, x \in X_n, t \in \square_{n-1}, (\delta_{i,n}^\alpha(x), t) \equiv (x, \rho_{i,n-1}^\alpha(t))$$

Ses éléments sont donc de la forme $[(x, (t_1, \dots, t_n))]$ où $x \in X_n$, les $t_i \in [0, 1]$ et $[\cdot]$ est la classe modulo \equiv . Pour chaque $x \in X_n$, on a un ordre partiel sur $\{x\} \times [0, 1]^n : (x, (t_1, \dots, t_n)) \leq_x (x, (t'_1, \dots, t'_n))$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $t_i \leq t'_i$. On définit alors \leq_X comme la cloture transitive sur $\overrightarrow{Geom}(X)$ de $\alpha \leq'_X \beta$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$, $x \in X_n$, $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n \in [0, 1]$ tels que $(x, (t_1, \dots, t_n)) \leq_x (x, (t'_1, \dots, t'_n))$, $\alpha = [(x, (t_1, \dots, t_n))]$ et $\beta = [(x, (t'_1, \dots, t'_n))]$. On appelle *réalisation digéométrique*, noté $\overrightarrow{Geom}(X)$, $Geom(X)$ muni de \leq_X . De manière générale, \leq_X n'est pas un ordre partiel, par exemple quand X a une boucle. Nous supposons dans la suite que X est tel que $(\overrightarrow{Geom}(X), \leq_X)$ est un pospace. C'est le cas notamment des exemples issus de PV-programmes et SU-programmes.

4.4.2 Traces dans un ensemble pré-cubique, systèmes discrets

Notre but dans cette section étant la calculabilité (propriété D), nous aimerions définir des analogues aux systèmes de traces, d'homotopie et d'homologie à partir d'un ensemble pré-cubique et qui soient finis par exemple dans le cas de PV-programmes. Cela nous oblige donc à définir les traces d'un ensemble pré-cubique sans passer par sa réalisation digéométrique. Fixons-nous un ensemble pré-cubique $X = ((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\delta_{i,n}^\alpha)_{i \leq n \in \mathbb{N}, \alpha \in \{0,1\}})$.

Définition 31 ([Faj05]). Soient x et $y \in X$. On dit que x est un *bord positif* (resp. un *bord négatif*) de y s'il existe $k \geq 0$ et i_0, \dots, i_k des entiers tels que $x = \delta_{i_k, n-k}^1 \circ \dots \circ \delta_{i_0, n}^1(y)$ (resp. $x = \delta_{i_k, n-k}^0 \circ \dots \circ \delta_{i_0, n}^0(y)$).

Une trace de x vers y dans X est une suite c_0, \dots, c_n de X (avec $n \geq 0$) telle que $c_0 = x$, $c_n = y$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

- ou bien c_{i-1} est un bord négatif de c_i
- ou bien c_i est un bord positif de c_{i-1}

Exemple 6. Reprenons l'exemple 3 page 4. $a_{1,3}, c, x_4$ est une trace dans cet ensemble pré-cubique.

Il est à noter que x et y ne sont pas forcément des éléments de X_0 . On peut associer à chacune de ces traces dans X une unique trace dans $\overrightarrow{Geom}(X)$ de manière canonique, à condition de faire une hypothèse de non dégénérescence sur X :

Définition 32 ([FGR06, Rau09]). X est dit *non self-linked* si pour tout $n \geq k \geq 0$, $x \in X_n$, $0 \leq i_k < \dots < i_1 \leq n$, $0 \leq j_k < \dots < j_1 \leq n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \{0, 1\}$, si $\delta_{i_k, n-k+1}^{\alpha_k} \circ \dots \circ \delta_{i_1, n}^{\alpha_1}(x) = \delta_{j_k, n-k+1}^{\beta_k} \circ \dots \circ \delta_{j_1, n}^{\beta_1}(x)$ alors pour tout $s \in \{1, \dots, k\}$, $i_s = j_s$ et $\alpha_s = \beta_s$.

Cela signifie que toutes les faces d'un élément de X sont différentes. C'est le cas en particulier dans nos exemples. Dans la suite, nous supposons X non self-linked.

Définition 33. Soit c_0, \dots, c_n une trace de X . La *réalisation digéométrique* de c_0, \dots, c_n , noté $\overrightarrow{Geom}(c_0, \dots, c_n)$, est la trace $\langle \gamma_1 \star \dots \star \gamma_n \rangle$ de $[(c_0, (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}))]$ vers $[(c_n, (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}))]$ dans $\overrightarrow{Geom}(X)$ où γ_i est défini comme suit :

- si c_{i-1} est un bord négatif de c_i , c_{i-1} s'écrit de manière unique $\delta_{i_k, n-k+1}^0 \circ \dots \circ \delta_{i_1, n}^0(c_i)$ avec $i_k < \dots < i_1$. On définit alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma_i(t) = [(c_i, (t_1, \dots, t_n))]$ où $t_i = \frac{t}{2}$ si $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$, $\frac{1}{2}$ sinon
- si c_i est un bord positif de c_{i-1} , c_i s'écrit de manière unique $\delta_{i_k, n-k+1}^1 \circ \dots \circ \delta_{i_1, n}^1(c_{i-1})$ avec $i_k < \dots < i_1$. On définit alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma_i(t) = [(c_{i-1}, (t_1, \dots, t_n))]$ où $t_i = \frac{1+t}{2}$ si $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$, $\frac{1}{2}$ sinon.

Exemple 7. La réalisation de la trace de l'exemple 6 est la suivante :

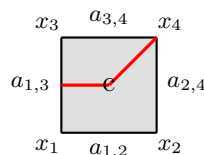


FIGURE 13

On peut alors définir la catégorie des traces et les systèmes de traces, d'homotopie et d'homologie :

Définition 34. La *catégorie des traces* de X $\overrightarrow{\mathcal{T}}(X)$ est la catégorie dont :

- les objets sont les éléments de X
- les morphismes de a vers b sont les traces de a vers b
- l'identité de a est la trace a
- la composition $(c_0, \dots, c_n) \circ (d_0, \dots, d_p)$ avec $d_p = c_0$ est $d_0, \dots, d_p, c_1, \dots, c_n$.

Définition 35. On note $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(c_0, c_n)$ pour $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))([(c_0, (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})]), [(c_n, (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})])])$.

Le système de traces de X $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(X)$ est le système naturel de \mathbf{Top}_* sur $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(X)$ qui :

- à chaque trace c_0, \dots, c_n associe $(\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(c_0, c_n), \overrightarrow{Geom}(c_0, \dots, c_n))$
- à chaque prolongement $((x_0, \dots, x_p), (y_0, \dots, y_q))$ de c_0, \dots, c_n (avec $x_p = c_0$ et $c_n = y_0$) vers $x_0, \dots, x_p, c_1, \dots, c_n, y_1, \dots, y_q$ associe la fonction continue de $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(c_0, c_n)$ dans $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(x_0, y_q)$ qui à $\langle q \rangle \in \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(c_0, c_n)$ associe $\overrightarrow{Geom}(y_0, \dots, y_q) \circ \langle q \rangle \circ \overrightarrow{Geom}(x_0, \dots, x_p)$ (où \circ est la composition dans $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))$).

Les systèmes d'homotopie et d'homologie se définissent alors de la même façon que dans les pospaces.

4.4.3 Lien avec les systèmes naturels donnés par la réalisation digéométrique

Le but de cette section est, étant donné un ensemble pré-cubique (non self-linked dont la réalisation digéométrique est un pospace), de voir quel est le lien entre $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(X)$ (resp. $\overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X)$, $\overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X)$) et $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))$ (resp. $\overrightarrow{\mathbb{H}}_n(\overrightarrow{Geom}(X))$, $\overrightarrow{\mathbb{H}}_n(\overrightarrow{Geom}(X))$).

Dans un sens, $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(X)$ s'injecte dans $\overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))$, c'est-à-dire on a un morphisme de système naturel $(\overrightarrow{Geom}, id) : \overrightarrow{\mathfrak{T}}(X) \rightarrow \overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))$ où :

- $\overrightarrow{Geom} : \overrightarrow{\mathfrak{T}}(X) \rightarrow \overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))$ est le foncteur qui :
 - à $x \in X$ associe $[(x, (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}))]$
 - à c_0, \dots, c_n trace de X associe $\overrightarrow{Geom}(c_0, \dots, c_n)$
 - id est la transformation naturelle telle que pour toute trace c_0, \dots, c_n , $id_{c_0, \dots, c_n} = id_{\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(c_0, c_n)}$.

On en déduit des morphismes $(\overrightarrow{Geom}, id) : \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X) \rightarrow \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(\overrightarrow{Geom}(X))$.

Dans l'autre sens, on commence par construire un foncteur $Carrier : \overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X)) \rightarrow \overrightarrow{\mathfrak{T}}(X)$:

Définition 36 ([Faj05]). Soit $p \in \overrightarrow{Geom}(X)$. Le *carrier* de p , noté $Carrier(p)$, est l'unique élément de X tel qu'il existe $n \geq 0$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 < t_i < 1$ tels que $p = [(Carrier(p), (t_1, \dots, t_n))]$.

Soit γ un dichemin dans $\overrightarrow{Geom}(X)$. Il existe une unique suite c_0, \dots, c_n d'éléments de X et une unique suite $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = 1$ telles que :

- pour tout $1 \leq i \leq n$, $c_{i-1} \neq c_i$
- pour tout $0 \leq i \leq n$, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, il existe $k \geq 0$ et pour tout $1 \leq j \leq k$, $s_j \in [0, 1]$ tels que $\gamma(t) = [(c_i, (s_1, \dots, s_k))]$
- pour tout $0 \leq i \leq n$, pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$, $Carrier(\gamma(t)) = c_i$
- $Carrier(\gamma(0)) = c_0$ et $Carrier(\gamma(1)) = c_n$
- pour tout $1 \leq i \leq n$, $Carrier(\gamma(t_i)) \in \{c_{i-1}, c_i\}$.

La suite c_0, \dots, c_n est appelée *carrier sequence* de γ et est notée $Carrier(\gamma)$.

La carrier sequence d'un dichemin est juste la suite des carriers traversés par l'image de γ . Cette définition passe aux traces :

Proposition 3. Deux chemins égaux modulo reparamétrisation ont même carrier sequence. On peut donc parler de la carrier sequence d'une trace $\langle p \rangle$, notée également $Carrier(\langle p \rangle)$.

De plus, la carrier sequence d'un dichemin (ou d'une trace) est une trace dans X et permet de définir un foncteur $Carrier : \overrightarrow{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{Geom}(X)) \rightarrow \overrightarrow{\mathfrak{T}}(X)$.

On peut alors construire un morphisme de systèmes naturels $(Carrier, \sigma_n) : \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(\overrightarrow{Geom}(X)) \rightarrow \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X)$ tel que pour toute trace $\langle p \rangle$ de $\overrightarrow{Geom}(X)$, $\sigma_{n, \langle p \rangle}$ est un isomorphisme. Sa construction étant un peu technique, nous la reportons en annexe B.5. Ce morphisme nous assure que toutes les informations du système d'homologie de la

réalisation digéométrique d'un ensemble pré-cubique se retrouvent dans le système d'homologie de celui-ci. Tout ceci montre que nous avons les mêmes informations dans les deux points de vue. De plus, combiné avec l'invariance par dihoméomorphisme, nous en déduisons que nous n'obtenons pas plus d'information après subdivision, ce qui nous donne une invariance par subdivision et donc par raffinement des actions.

4.4.4 Calculabilité et exemples

Etant donné un ensemble pré-cubique fini, non self-linked et sans boucle, $\vec{\mathcal{T}}(X)$ est fini et étant donné deux points, [Rau12] nous donne un moyen algorithmique de construire une représentation finie de l'espace des traces entre ces points, et donc de calculer l'homologie de celui-ci.

Ceci nous permet donc de calculer en partie les systèmes d'homologie (il resterait à calculer les morphismes entre les groupes d'homologie). Cela reste néanmoins suffisant pour nos premiers exemples :

Tout d'abord, revenons à l'exemple des SU-programmes de la section 4.1.2. Le calcul du $\vec{\mathbb{H}}_1$ du SU-programme de gauche nous dit que pour une trace, le groupe associé est isomorphe à \mathbb{Z}^4 et le calcul du $\vec{\mathbb{H}}_1$ du SU-programme de droite, que pour toute trace, le groupe associé n'est jamais isomorphe à \mathbb{Z}^4 .

Ensuite, revenons à la boîte d'allumettes de la section 3.3. Le calcul de son $\vec{\mathbb{H}}_1$ nous dit que pour une trace $(\alpha\beta, a, \alpha\gamma, c, \gamma\delta$ par exemple), le groupe associé est isomorphe à \mathbb{Z}^2 . En particulier, cela signifie qu'il y a des dichemins qui ne sont pas dihomotopes et qu'on peut le voir sur les systèmes d'homologie.

Nous terminerons par deux remarques :

- au niveau de la complexité, si elle n'a pas été étudiée précisément, la procédure de [Rau12] pour construire cette représentation finie de l'espace des traces est coûteuse en espace et en temps. Pendant ce stage, nous avons cherché d'autres représentations sachant que notre but est d'en calculer l'homologie, sans obtenir de résultat satisfaisant. Cependant, cette problématique mériterait d'être étudiée.
- notre problématique de l'homologie dirigée semble avoir un lien étroit avec l'homologie persistante de [Car09] (nous illustrons ce lien en annexe D). Le calcul de cette homologie persistante étant une généralisation de la mise sous forme normale de Smith, son algorithmique a été bien étudiée. Ce lien mérite d'être examiné plus en détail.

5 Conclusion et travaux futurs

Nous avons donc ici posé les bases d'un de nos candidats pour l'homologie dirigée. Nous avons en particulier débuté l'étude théorique de celui-ci : l'invariance par dihoméomorphisme (théorème 6), l'invariance par subdivision (section 4.4.3) pour la propriété A ; le théorème d'Hurewicz (théorème 7), la distinction entre homotopie et dihomotopie dans la boîte d'allumettes (section 4.4.4) pour la propriété B ; des résultats de préservation de suites exactes (théorèmes 8 et 10) pour la propriété C ; une méthode de calcul (section 4.4.4).

Cependant, il reste encore énormément de choses à faire :

- faire le lien avec les bisimulations [FL13, Muk02], les équivalences observationnelles [PP90] et des propriétés temporelles [BC10] dans les systèmes de vraie concurrence, pour voir dans quelle mesure notre homologie dirigée est un invariant des propriétés informatiques de nos systèmes
- définir une représentation combinatoire de l'espace des traces directement à partir d'un ensemble pré-cubique plus adaptée aux calculs homologiques
- dériver des propriétés de modularité des théorèmes de préservation de suites exactes
- implémenter le calcul
- développer le lien avec l'homologie persistante [Car09].

Ce travail sera continué durant la thèse.

Références

- [BC10] Paolo Baldan and Silvia Crafa. A Logic for True Concurrency. In *CONCUR*, pages 147–161, 2010.
- [BCC⁺11] Richard Bonichon, Géraud Canet, Loïc Correnson, Eric Goubault, Emmanuel Haucourt, Michel Hirschowitz, Sébastien Labbé, and Samuel Mimram. Rigorous Evidence of Freedom from Concurrency Faults in Industrial Control Software. In *SAFECOMP*, pages 85–98, 2011.
- [Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1 : Basic Category Theory*. Cambridge University Press, 1994.
- [Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2 : Categories and Structures*. Cambridge University Press, 1994.
- [Bro06] Ronald Brown. *Topology and Groupoids*. BookSurge, 2006.
- [BW85] Hans-Joachim Baues and Gunther Wirsching. Cohomology of small categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 38(2-3) :187–211, 1985.
- [Car09] Gunnar Carlsson. Topology and Data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46 :255–308, 2009.
- [CZ05] Gunnar Carlsson and Afra Zomorodian. Computing Persistent Homology. *Discrete and Computational Geometry*, 33(2) :249–274, 2005.
- [CZ09] Gunnar Carlsson and Afra Zomorodian. The Theory of Multidimensional Persistence. *Discrete and Computational Geometry*, 42(1) :71–93, 2009.
- [Dij65] Edsger W. Dijkstra. Cooperating Sequential Processes. Technical Report EWD-123, Technological University Eindhoven, 1965.
- [Fah04] Ulrich Fahrenberg. Directed Homology. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 100 :111–125, 2004.
- [Faj05] Lisbeth Fajstrup. Dipaths and dihomotopies in a cubical complex. *Advances in Applied Mathematics*, 35(2) :188–206, 2005.
- [FGH⁺12] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, Emmanuel Haucourt, Samuel Mimram, and Martin Raussen. Trace Spaces : An Efficient New Technique for State-Space Reduction. In *ESOP*, pages 274–294, 2012.
- [FGR98] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, and Martin Raussen. Detecting Deadlocks in Concurrent Systems. In *CONCUR*, pages 332–347, 1998.
- [FGR06] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, and Martin Raussen. Algebraic topology and concurrency. *Theoretical Computer Science*, 357(1-3) :241–278, 2006.
- [FL13] Uli Fahrenberg and Axel Legay. History-preserving bisimilarity for higher-dimensional automata via open maps. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 298 :165–178, 2013.
- [GH05] Eric Goubault and Emmanuel Haucourt. A Practical Application of Geometric Semantics to Static Analysis of Concurrent Programs. In *CONCUR*, pages 503–517, 2005.
- [GH07] Eric Goubault and Emmanuel Haucourt. Components of the Fundamental Category II. *Applied Categorical Structures*, 15(4) :387–414, 2007.
- [GM12] Eric Goubault and Samuel Mimram. Formal Relationships Between Geometrical and Classical Models for Concurrency. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 283 :77–109, 2012. Proceedings of the workshop on Geometric and Topological Methods in Computer Science (GETCO).
- [GMM13] Yves Guiraud, Philippe Malbos, and Samuel Mimram. A Homotopical Completion Procedure with Applications to Coherence of Monoids. In *RTA*, pages 223–238, 2013.
- [Gou95] Eric Goubault. *Géométrie du parallélisme*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1995.
- [Gou02] Eric Goubault. Labelled cubical sets and asynchronous transition systems : An adjunction. Presented at CMCIM’02, 2002.
- [Gou03] Eric Goubault. Some geometric perspectives in concurrency theory. *Homology, Homotopy and Applications*, 5(2) :95–136, 2003.
- [GR02] Eric Goubault and Martin Raussen. Dihomotopy as a Tool in State Space Analysis. In *LATIN*, pages 16–37, 2002.

- [Gra91a] Marco Grandis. General homological algebra, I. Semiexact and homological categories. preprint 186, Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Genova, 1991.
- [Gra91b] Marco Grandis. General homological algebra, II. Homology and satellites. preprint 187, Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Genova, 1991.
- [Gra03] Marco Grandis. Directed homotopy theory, I. The fundamental category. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 44 :281–316, 2003.
- [Gra04] Marco Grandis. Inequillogical spaces, directed homology and noncommutative geometry. *Homology, Homotopy and Applications*, 6 :413–437, 2004.
- [Gra07] Marco Grandis. Directed algebraic topology, categories and higher categories. *Applied Categorical Structures*, 15 :341–353, 2007.
- [Gra09] Marco Grandis. *Directed Algebraic Topology, Models of non-reversible worlds*. Cambridge University Press, 2009.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [HKR13] Maurice Herlihy, Dmitry Kozlov, and Sergio Rajsbaum. *Distributed Computing Through Combinatorial Topology*. Elsevier Science, 2013.
- [Jar02] John F. Jardine. Cubical homotopy theory : a beginning. preprint NI02030-NST, Newton Institute, 2002.
- [Kah13] Thomas Kahl. The homology graph of a higher dimensional automaton. arXiv :1307.7994, 2013.
- [Kri09] Sanjeevi Krishnan. A Convenient Category of Locally Preordered Spaces. *Applied Categorical Structures*, 17(5) :445–466, 2009.
- [Mal03] Philippe Malbos. Rewriting Systems and Hochschild-Mitchell Homology. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 81 :59–72, 2003.
- [Mar00] Fotini Markopoulou. The Internal Description of a Causal Set : What the Universe Looks Like from the Inside. *Communications in Mathematical Physics*, 211 :559–583, 2000.
- [Mas80] William S. Massey. *Singular Homology Theory*, volume 70 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York Inc., 1980.
- [Muk02] Madhavan Mukund. Hereditary History Preserving Bisimulation Is Decidable for Trace-Labelled Systems. In *FSTTCS*, pages 289–300, 2002.
- [Mun30] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publisher Company, 1930.
- [Nac65] Leopoldo Nachbin. *Topology and order*, volume 4 of *Van Nostrand mathematical studies*. Robert E. Krieger Publishing Company, 1965.
- [Por14] Timothy Porter. Group objects in $\text{Cat}_{\Sigma_0}/\text{B}$. working notes, 2014.
- [PP90] Gordon Plotkin and Vaughan Pratt. Teams Can See Pomsets. Extended Abstract, 1990.
- [Pra91] Vaughan R. Pratt. Modeling Concurrency with Geometry. In *POPL*, pages 311–322, 1991.
- [Rau09] Martin Raussen. Trace spaces in a pre-cubical complex. *Topology and its Applications*, 156(9) :1718–1728, 2009.
- [Rau10] Martin Raussen. Simplicial models for trace spaces. *Algebraic and Geometric Topology*, 10(3) :1683–1714, 2010.
- [Rau12] Martin Raussen. Simplicial models for trace spaces II : General higher dimensional automata. *Algebraic and Geometric Topology*, 12(3) :1741–1762, 2012.
- [Spa94] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*, volume 55 of *Mathematics subject classifications*. Springer-Verlag New York Inc., 1994.
- [Tas10] Christine Tasson. Wait-free protocols : from discrete to topological semantics. technical report, CEA Saclay, 2010.

A Quelques exemples de calculs d'homologie classique : les sphères

A.1 Par la mise sous forme normale de Smith

Calculons l'homologie de la sphère de dimension 2. Commençons par en donner une représentation sous forme d'ensemble pré-cubique. Considérons cet ensemble pré-cubique :

- $X_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_1 = \{a, b, c, d\}$ et $X_2 = \{A, B\}$
- $\delta_{1,1}^0(a) = \delta_{1,1}^1(d) = 1$, $\delta_{1,1}^0(b) = \delta_{1,1}^1(a) = 2$, $\delta_{1,1}^0(c) = \delta_{1,1}^1(b) = 3$ et $\delta_{1,1}^0(d) = \delta_{1,1}^1(c) = 4$
- $\delta_{1,2}^0(A) = \delta_{1,2}^0(B) = d$, $\delta_{2,2}^0(A) = \delta_{2,2}^0(B) = a$, $\delta_{1,2}^1(A) = \delta_{1,2}^1(B) = b$ et $\delta_{2,2}^1(A) = \delta_{2,2}^1(B) = c$

On peut montrer que la réalisation géométrique de cet ensemble est homéomorphe (donc homotopiquement équivalent) à la sphère. Donc, l'homologie singulière de la sphère est isomorphe à l'homologie cubique de cet ensemble.

Nous allons expliquer ici la mise sous forme normale de Smith et son application au calcul de l'homologie comme présenté dans [Mun30]. Si on considère un ensemble pré-cubique fini X , tous les groupes de chaînes $C_n(X)$ sont abéliens finiment engendrés et donc les groupes d'homologie aussi. Par la théorie des modules de type fini sur un anneau principal, on sait qu'un tel groupe est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbb{Z}^\beta \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$ avec $2 \leq a_1 | \dots | a_n$. On entend par 'calculer' un groupe d'homologie, calculer β (nombre de Betti) et les a_i (facteurs de torsion). Un moyen est de calculer la mise sous forme normale de Smith des fonctions bords ∂ .

On considère les opérations élémentaires sur les matrices entières suivantes :

- échanger 2 colonnes (lignes)
- multiplier une ligne (colonne) par -1
- remplacer la ligne (colonne) i par $(\text{ligne } i) + q \cdot (\text{ligne } k)$ ($(\text{colonne } i) + q \cdot (\text{colonne } k)$) avec $q \in \mathbb{N}$ et $i \neq k$

Si G et G' sont des groupes abéliens libres finiment engendrés (donc des \mathbb{Z} -modules libres de type fini) et $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupe, f peut être vu comme une matrice M_f à coefficients entiers. Il existe une unique matrice S_f obtenue à partir de M et des opérations élémentaires telle qu'elle soit diagonale et telle que ses coefficients diagonaux non nuls a_1, \dots, a_n sont tels que $a_1 | \dots | a_n$. C'est la forme normale de Smith de M_f (de f).

Dans le cas où $G = C_{n+1}$, $G' = C_n$ et $f = \partial_n$, on définit M_{∂_n} de cette façon : on suppose que l'ensemble pré-cubique $X = (X_n)_n$ est de la forme $X_i = \{1, \dots, k_i\}$. M_{∂_n} est une matrice à k_{n+1} lignes et k_n colonnes et le coefficient (i, j) est égal au coefficient en j de $\partial_n(i)$. Dans notre exemple de la sphère :

$$M_{\partial_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_{\partial_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\partial_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{\partial_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les liens entre les S_{∂_n} et les groupes d'homologie sont les suivants :

- le nombre de Betti de $H_n(X)$ est le nombre de lignes non nulles de $S_{\partial_{n+1}}$ moins le nombre de colonnes nulles de S_{∂_n}
- les facteurs de torsion de $H_n(X)$ sont les coefficients diagonaux non inversibles de S_{∂_n}

Par exemple, $H_1(S^2)$ n'a pas de torsion et son nombre de Betti est $1 - 1 = 0$ donc est isomorphe à 0.

Pour les autres, c'est un peu plus subtil :

- $M_{\partial_0} = S_{\partial_0}$ est la matrice à 4 lignes et 0 colonne. Elle a donc 4 lignes non nulles et aucun coefficient diagonal (par convention). Donc, $H_0(X)$ n'a pas de torsion et a $4 - 3 = 1$ comme nombre de Betti donc est isomorphe à \mathbb{Z}
- $M_{\partial_3} = S_{\partial_3}$ est la matrice à 0 ligne et 2 colonnes. Elle a donc 2 colonnes nulles et aucun coefficient diagonal (par convention). Donc, $H_2(X)$ n'a pas de torsion et a $3 - 2 = 1$ comme nombre de Betti donc est isomorphe à \mathbb{Z}
- les autres groupes d'homologie sont nuls.

A.2 Par les suites exactes : théorème de Mayer-Vietoris

Le théorème de Mayer-Vietoris est l'un des théorèmes que l'on peut obtenir à partir du théorème de préservation des suites exactes. C'est l'un des théorèmes qui montrent toute la modularité de l'homologie. Il permet de calculer l'homologie d'un espace à partir de celle de sous-espaces. Cela va nous permettre ici de calculer l'homologie des sphères par récurrence. Formellement :

Théorème 9 (Mayer-Vietoris [Hat02]). *Soient $A, B \subseteq X$ des espaces topologiques tels que l'union des intérieurs de A et B recouvre X . Alors, il existe une suite exacte de la forme :*

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n B \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

En fait, on pourrait définir les morphismes, mais nous n'en aurons pas besoin ici. Il nous suffira de remarquer ceci : si

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est exacte et

- si $A = 0$ alors g est injective
- si $C = 0$ alors f est surjective.

Supposons que l'on sache que l'homologie du cercle S^1 est la suivante : $H_0(S^1) \simeq H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ et pour tout $i \geq 2$, $H_i(S^1) \simeq 0$. On va décomposer la sphère S^2 afin de pouvoir utiliser le théorème de Mayer-Vietoris. On prend $X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $A = S^2 \setminus (0, 0, 1)$ et $B = S^2 \setminus (0, 0, -1)$. A et B sont contractiles (ils sont homéomorphes à un plan et un plan est contractile). Donc, $H_0(A) \simeq H_0(B) \simeq \mathbb{Z}$ et pour tout $i \geq 1$, $H_i(A) \simeq H_i(B) \simeq 0$ (ils ont l'homologie du point). $A \cap B$ est homotopiquement équivalent à S^1 (il suffit de contracter $A \cap B$ sur l'équateur qui est un cercle), donc pour tout i , $H_i(A \cap B) \simeq H_i(S^1)$. $H_0(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ car elle est connexe. $H_1(S^2) \simeq 0$ car elle est simplement connexe. Pour tout $i \geq 2$, par le théorème de Mayer-Vietoris :

$$0 \simeq H_n(A) \oplus H_n B \longrightarrow H_n(S^2) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1} B \simeq 0$$

est exacte et donc par la remarque précédente, le morphisme du milieu est un isomorphisme. Donc $H_2(S^2) \simeq H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ et pour tout $i \geq 3$, $H_i(S^2) \simeq H_{i-1}(S^1) \simeq 0$. On pourrait généraliser ce raisonnement pour calculer les groupes d'homologie de toutes les sphères (on peut même obtenir ceux de S^1 de cette façon).

B Preuves et approfondissement de la section 4

B.1 Preuve de functorialité

Démonstration de la proposition 1.

Soit $F : X \rightarrow Y$ une fonction continue croissante entre pospaces. Nous voulons définir $\vec{\mathbb{T}}(F) = (\Phi_F, \tau_F) : \vec{\mathbb{T}}(X) \rightarrow \vec{\mathbb{T}}(Y)$ morphisme de systèmes naturels :

- $\Phi : \vec{\mathcal{T}}(X) \rightarrow \vec{\mathcal{T}}(Y)$ est le foncteur tel que :
 - pour tout $x \in X$, $\Phi_F(x) = F(x)$
 - pour toute trace $\langle p \rangle$ de X , $\Phi_F(\langle p \rangle) = \langle F \circ p \rangle$
- pour toute trace $\langle p \rangle$ de a vers b dans X ,

$$\tau_{F, \langle p \rangle} : (\vec{\mathcal{T}}(X)(a, b), \langle p \rangle) \longrightarrow (\vec{\mathcal{T}}(Y)(F(a), F(b)), \langle F \circ p \rangle)$$

$$\langle q \rangle \longmapsto \langle F \circ q \rangle$$

La naturalité de τ_F se traduit en : pour toute trace $\langle p \rangle$ dans X et tout prolongement $(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle)$ de $\langle p \rangle$,

$$\langle F \circ (\alpha \star p \star \beta) \rangle = \langle (F \circ \alpha) \star (F \circ p) \star (F \circ \beta) \rangle$$

$\vec{\mathbb{T}}(id_X)$ est l'identité de $\vec{\mathbb{T}}(X)$.

Si $F : X \rightarrow Y$ et $G : Y \rightarrow Z$, $\vec{\mathbb{T}}(G) \circ \vec{\mathbb{T}}(F) = (\Phi_G \circ \Phi_F, (\tau_{G, \Phi_F(\langle p \rangle)} \circ \tau_{F, \langle p \rangle})_{\langle p \rangle} \text{ trace de } X)$. Or $\Phi_G \circ \Phi_F = \Phi_{G \circ F}$ et $\tau_{G, \Phi_F(\langle p \rangle)} \circ \tau_{F, \langle p \rangle}(\langle q \rangle) = \tau_{G, \langle F \circ q \rangle}(\langle F \circ q \rangle) = \langle G \circ F \circ q \rangle = \tau_{G \circ F, q}$. Donc $\vec{\mathbb{T}}(G) \circ \vec{\mathbb{T}}(F) = (\Phi_{G \circ F}, (\tau_{G \circ F, \langle p \rangle})_{\langle p \rangle}) = \vec{\mathbb{T}}(G \circ F)$.

Donc $\vec{\mathbb{T}}$ est un foncteur. Les autres s'en déduisent. .QED.

B.2 Preuve du théorème de Hurewicz

Démonstration du théorème 7. Dans tous les cas, $(id_{\vec{\mathbb{T}}(X)}, (\tau_{\langle p \rangle})_{\langle p \rangle})$ où $\tau_{\langle p \rangle}$ est l'isomorphisme correspondant dans le théorème d'Hurewicz classique est un morphisme de systèmes naturels (la naturalité de τ provient de la naturalité dans le théorème de Hurewicz classique) qui est un isomorphisme. .QED.

B.3 Preuve du caractère abélien de $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$

Les définitions et terminologies sont celles de [Bor94a, Bor94b]. Nous définirons les notions catégoriques au fur et à mesure de la preuve.

Définition 37. Une catégorie \mathcal{M} est *abélienne* lorsque :

- \mathcal{M} a un objet zéro
- tout couple d'objets de \mathcal{M} a un produit et un coproduit
- tout morphisme de \mathcal{M} a un noyau et un conoyau
- tout monomorphisme (resp. épimorphisme) de \mathcal{M} est le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme

Proposition 4. Pour toute petite catégorie \mathcal{C} , $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie abélienne.

B.3.1 Objet zéro

Définition 38. Un *objet zéro* 0 dans une catégorie \mathcal{M} est un objet tel que pour tout objet A de \mathcal{M} , il existe un unique morphisme de A vers 0 et un unique morphisme de 0 vers A .

Démonstration. On considère $\mathbb{0}$ le système naturel dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ qui a tout morphisme de \mathcal{C} associe le groupe nul et à tout prolongement le morphisme nul.

Si on prend \mathbb{A} dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$, l'unique morphisme $\tau = (\tau_f)_f$ de \mathbb{A} vers $\mathbb{0}$ est celui tel que τ_f est le morphisme nul pour tout f . Idem de $\mathbb{0}$ vers \mathbb{A} . .QED.

B.3.2 Produit, coproduit

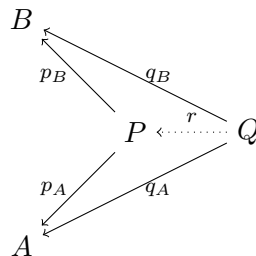
Définition 39. Soient A et B deux objets de \mathcal{M} . Un produit de A et B est un triplet (P, p_A, p_B) où :

- P est un objet de \mathcal{M}
- $p_A : P \rightarrow A$ et $p_B : P \rightarrow B$ sont des morphismes de \mathcal{M}

tels que pour tout autre triplet (Q, q_A, q_B) où :

- Q est un objet de \mathcal{M}
- $q_A : Q \rightarrow A$ et $q_B : Q \rightarrow B$ sont des morphismes de \mathcal{M}

il existe un unique morphisme $r : Q \rightarrow P$ tel que $p_A \circ r = q_A$ et $p_B \circ r = q_B$.



Démonstration. Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$. Le produit $(\mathbb{P}, (p_{A,f})_f, (p_{B,f})_f)$ se construit comme suit :

- pour tout morphisme f , $\mathbb{P}(f) = \mathbb{A}(f) \times \mathbb{B}(f)$ où \times dénote le produit cartésien de groupes

- pour tout prologement (α, β) , $\mathbb{P}(\alpha, \beta) = (\mathbb{A}(\alpha, \beta), \mathbb{B}(\alpha, \beta))$
 - $p_{A,f}$ (resp. $p_{B,f}$) est la projection sur $\mathbb{A}(f)$ (resp. sur $\mathbb{B}(f)$).
- Si on prend un autre triplet $(\mathbb{Q}, (q_{A,f})_f, (q_{B,f})_f)$, l'unique $(r_f)_f$ est celui tel que $r_f = (q_{A,f}, q_{B,f})$. .QED.

Le *coproduit* est la notion duale du produit et se construit de la même façon.

B.3.3 Noyau, conoyau

Définition 40. Soit \mathcal{C} une catégorie avec un objet zéro 0 . Pour tout couple A, B d'objets de \mathcal{C} , on note $0_{A,B}$ la composition de l'unique morphisme de A vers 0 et de l'unique morphisme de 0 vers B .

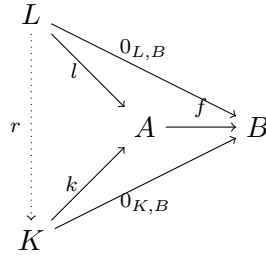
Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{C} . Un *noyau* de f est un couple (K, k) où :

- K est un objet de \mathcal{C}
- $k : K \rightarrow A$ est un morphisme vérifiant $f \circ k = 0_{K,B}$

tels que pour tout autre couple (L, l) où :

- L est un objet de \mathcal{C}
- $l : L \rightarrow A$ est un morphisme vérifiant $f \circ l = 0_{L,B}$

il existe un unique morphisme $r : L \rightarrow K$ tel que $l = k \circ r$.



Démonstration. La construction est celle de la définition 28 page 16. .QED.

Le *conoyau* est la notion duale. Sa construction suit le même principe : on construit à chaque niveau le conoyau dans \mathbf{Ab} , c'est-à-dire le quotient par l'image.

B.3.4 Monomorphisme, épimorphisme

Définition 41. Un morphisme $f : A \rightarrow B$ est appelé *monomorphisme* lorsque pour toute paire $g, h : C \rightarrow A$ de morphismes, si $f \circ g = f \circ h$ alors $g = h$.

Dans \mathbf{Ab} , être un monomorphisme équivaut à être injectif et équivaut à être un noyau (au sens catégorique) d'un morphisme.

Démonstration. Soit $\tau = (\tau_f)_f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un monomorphisme de $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$. Comme $\tau \circ \ker \tau = 0_{\ker \tau, \mathbb{B}} = \tau \circ 0_{\ker \tau, \mathbb{A}}$. Donc $\ker \tau = 0_{\ker \tau, \mathbb{A}}$. Cela signifie que pour tout f , $\ker \tau_f$ est le groupe nul et donc que τ_f est injectif (dans \mathbf{Ab}) et donc est un noyau. On en déduit que τ est un noyau. .QED.

Être un épimorphisme est la propriété duale d'être un monomorphisme. Le raisonnement de la preuve pour les épimorphismes est le même que celui pour les monomorphismes.

B.4 Généralisation à $\mathbf{SysNat}(\mathbf{Ab})$

Nous développons ici la théorie générale de [Gra91a, Gra91b] dans le cadre de $\mathbf{SysNat}(\mathbf{Ab})$ afin de démontrer une forme faible de théorème de préservation de suites exactes. La théorie est proche de celle des catégories abéliennes dans lequel ce théorème est automatique. Ce qui permettait de définir suites exactes et homologie dans $\mathbf{SysNat}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ était le fait de pouvoir parler de morphismes nuls (pour pouvoir définir noyaux et images). Dans $\mathbf{SysNat}(\mathbf{Ab})$ nous n'avons pas d'objet zéro mais nous pouvons toujours parler de morphismes nuls :

Définition 42 ([Gra91a, Gra91b]). Soit \mathcal{A} une catégorie. Un *idéal* de \mathcal{A} est un ensemble de morphismes stables par composition à gauche et à droite par un morphisme quelconque de \mathcal{A} .

Soit N un idéal de \mathcal{A} . Les morphismes de N sont dits *nuls*. Un *objet nul* est un objet de \mathcal{A} dont l'identité est nulle. On dit que N est *clos* si chaque morphisme nul factorise à travers un objet nul i.e. pour chaque $f : A \rightarrow B \in N$, il existe un objet nul C et deux morphismes $g : A \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow B$ tels que $f = h \circ g$.

Le *noyau* (par rapport N) d'un morphisme $f : A \rightarrow B$ de \mathcal{A} est caractérisé (s'il existe) à isomorphisme près par la propriété suivante :

- $\ker f : Ker f \rightarrow A$ tel que $f \circ \ker f \in N$
- pour tout $g : C \rightarrow A$ tel que $f \circ g \in N$, il existe un unique $h : C \rightarrow Ker f$ tel que $g = \ker f \circ h$

On définit de manière duale le *conoyau*.

Une catégorie *semi-exacte* est une paire (\mathcal{A}, N) où N est un idéal clos de \mathcal{A} tel que chaque morphisme de \mathcal{A} a un noyau et un conoyau (par rapport à N).

On appelle *mono normal* (resp. *épi normal*), un morphisme qui est le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme.

On appelle *image* de f , $im f = \ker \text{cok } f$ et *coimage*, $coim f = \text{cok } \ker f$.

Ceci permet de définir la notion de suite exacte :

Définition 43 ([Gra91a]). La suite

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est dite d'ordre deux (resp. exacte courte, exacte) if $g \circ f$ est nulle (resp. si $f = \ker g$ et $g = \text{cok } f$, si $im f = \ker g$).

Nous démontrons :

Lemme 1. Si (\mathcal{M}, N) est semi-exacte alors $L = \{(\Phi, \tau) \mid \forall f, \tau_f \in N\}$ est un idéal clos de $\mathbf{SysNat}(\mathcal{M})$ et $\mathbf{SysNat}(\mathcal{M})$ a des noyaux par rapport L .

Démonstration.

- L est un idéal parce que N l'est.
- L clos : nous savons par 3.7 de [Gra91a] que dans \mathcal{M} , $f : A \rightarrow B$ est nulle ssi f se factorise à travers $\ker 1_B : Ker 1_B \rightarrow B$ et que $\ker 1_B$ est un objet nul. Donc, si $(\Phi, \tau) : (\mathcal{C}, G) \rightarrow (\mathcal{C}', G')$ est nul alors il se factorise à travers $(\mathcal{C}', 0_{G'})$ où $0_{G'} : FC' \rightarrow \mathcal{M}$ avec $0_{G'}(f) = \ker 1_{G'(f)}$ et $0_{G'}(\alpha, \beta) : 0_{G'}(f) \rightarrow 0_{G'}(g)$ l'unique morphisme qui rend ce carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \ker 1_{G'(f)} & \xrightarrow{Ker 1_{G'(f)}} & G'(f) \\ \downarrow 0_{G'}(\alpha, \beta) & & \downarrow G'(\alpha, \beta) \\ \ker 1_{G'(g)} & \xrightarrow{Ker 1_{G'(g)}} & G'(g) \end{array}$$

provenant de la propriété universelle de $Ker 1_{G'(g)}$.

- noyaux : si $(\Phi, \tau) : (\mathcal{C}, G) \rightarrow (\mathcal{C}', G')$, on construit $Ker(\Phi, \tau) = (\Phi_{ker}, \tau_{ker}) : \ker(\Phi, \tau) = (\mathcal{C}_{ker}, G_{ker}) \rightarrow (\mathcal{C}, G)$ comme suit :
 - $\mathcal{C}_{ker} = \mathcal{C}$
 - $\Phi_{ker} = id_{\mathcal{C}}$
 - $G_{ker} : FC \rightarrow \mathcal{M}$ avec $G_{ker}(f) = \ker \tau_f$ et $G_{ker}(\alpha, \beta)$ l'unique morphisme qui rend le carré gauche commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \ker \tau_f & \xrightarrow{Ker \tau_f} & G(f) & \xrightarrow{\tau_f} & G'(\Phi(f)) \\ \downarrow G_{ker}(\alpha, \beta) & & \downarrow G(\alpha, \beta) & & \downarrow G'(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) \\ \ker \tau_g & \xrightarrow{Ker \tau_g} & G(g) & \xrightarrow{\tau_g} & G'(\Phi(g)) \end{array}$$

provenant de la propriété universelle de $Ker \tau_g$

$$- (\tau_{ker})_f = Ker \tau_f.$$

.QED.

Proposition 5. *SysNat(Ab) est semi-exacte.*

Démonstration. Il reste l'existence des conoyaux : si $(\Phi, \tau) : (\mathcal{C}, G) \longrightarrow (\mathcal{C}', G')$, on construit $Cok(\Phi, \tau) = (\Phi_{cok}, \tau_{cok}) : (\mathcal{C}', G') \longrightarrow cok(\Phi, \tau) = (\mathcal{C}_{cok}, G_{cok})$ comme suit :

- $\mathcal{C}_{cok} = \mathcal{C}'$
- $\Phi_{cok} = id_{\mathcal{C}'}$
- soit $\Gamma = \{(R_g)_{g \in \mathcal{C}'} \mid R_g \text{ sous-groupe de } G'(g) \text{ contenant tous les } Im \tau_f \text{ tels que } \Phi(f) = g \text{ et tel que si } (\alpha, \beta) : g_1 \longrightarrow g_2 \text{ alors } G'(\alpha, \beta)(R_{g_1}) \subseteq R_{g_2}\}$. Γ contient $(G'(g))_{g \in \mathcal{C}'}$ et est stable par intersection. On définit alors $(H_g)_{g \in \mathcal{C}'}$ comme l'intersection de tous les éléments de Γ . Alors $(H_g)_{g \in \mathcal{C}'} \in \Gamma$.
- $G_{cok} : FC' \longrightarrow Ab$ avec $G_{cok}(f) = G'(f)/H_f$ et $G_{cok}(\alpha, \beta)([x]) = [G'(\alpha, \beta)(x)]$ (bien définie parce que $(H_g)_{g \in \mathcal{C}'} \in \Gamma$).
- $(\tau_{cok})_f(x) = [x]$.

.QED.

Comme dans le cas de **SysNat(C, Ab)**, nous aimerions pouvoir définir une homologie de systèmes naturels. Un cadre général est celui des catégorie homologique :

Définition 44 ([Gra91a]). On dit qu'un morphisme est *exact* s'il se factorise comme $n \circ q$ avec q , un épi normal et n , un mono normal.

Une catégorie semi-exacte (\mathcal{A}, N) est dite homologique si :

- monos normaux et épis normaux sont stables par composition
- $m : B \rightarrow A$ est un mono normal et $q : A \rightarrow C$ un épi normal tels qu'il existe un morphisme k tel que $ker q = m \circ k$ (on note $ker q \leq m$) alors $q \circ m$ est exact.

Dans ce cas, si $m : M \rightarrow A$ et $n : N \rightarrow A$ deux monos normaux avec $m \geq n$, et si $q = cok n$, l'objet $coim q \circ m$ (isomorphe à $im q \circ m$) défini à isomorphisme près sera appelé sous-quotient de A induit par $m \geq n$ et noté M/N .

Dans le cas des groupes abéliens, les monos normaux sont à isomorphisme près les injections canoniques de sous-groupes. Cette définition dit que si on a des groupes abéliens $N \subseteq M \subseteq A$, on peut construire le quotient M/N .

Nous montrons :

Lemme 2. *SysNat(Ab) est homologique.*

Démonstration.

- les monos (resp. épis) normaux sont les morphismes de la forme (Φ, τ) avec Φ un isofoncteur et pour tout f, τ_f injectif (resp. surjectif). Donc ils sont stables par composition.
- La caractérisation par pushouts (ex3a* de [Gra91a]) est une conséquence du cas de **Ab**.

.QED.

Nous avons alors une notion naturelle d'homologie dans une catégorie homologique :

Définition 45 ([Gra91b]). Les complexes de chaînes dans une catégorie semi-exacte \mathcal{A} sont définis de la même façon que dans les groupes abéliens en demandant que les suites $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$ soient d'ordre deux. Un morphisme de complexe de chaînes $(f_n)_n : (C_n, \partial_n) \longrightarrow (C'_n, \partial'_n)$ est la donnée de morphismes $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ tels que $\partial'_n \circ f_{n+1} = f_n \circ \partial_n$. On définit ainsi une catégorie $C_\bullet(\mathcal{A})$ semi-exacte qui est homologique quand \mathcal{A} l'est. On peut alors définir pour $A_\bullet = (A_n, \partial_n)$ un complexe de chaînes :

- $Z_n(A_\bullet) = ker \partial_{n-1}$
- $B_n(A_\bullet) = im \partial_n$
- $H_n(A_\bullet) = Z_n(A_\bullet)/B_n(A_\bullet)$

et ces constructions sont fonctorielles.

Dans ce cadre plus général que les catégories abéliennes, le théorème de préservation des suites exactes devient :

Théorème 10 ([Gra91b]). *Soit \mathcal{A} une catégorie homologique.*

Pour chaque suite exacte courte dans $C_\bullet(\mathcal{A})$:

$$U \xrightarrow{m} V \xrightarrow{p} W$$

il existe une suite longue d'ordre deux dans \mathcal{A} :

$$\dots \longrightarrow H_n(V) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(W) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U) \xrightarrow{H_{n-1}(m)} H_{n-1}(V) \longrightarrow \dots$$

naturelle en la suite exacte courte.

De plus, [Gra91b] donne des conditions pour que la suite d'ordre deux soit exacte.

Pour que toutes ces suites d'ordre deux soient exactes, il faut et il suffit que \mathcal{A} soit modulaire (voir [Gra91b]). Or $\mathbf{SysNat}(\mathbf{Ab})$ ne l'est pas. Il s'agirait de particulariser les conditions du théorème 10 dans notre cadre pour voir dans quel cas nous pouvons avoir des suites exactes.

B.5 Construction du morphisme de 4.4.3

Nous voulons construire le σ_n du morphisme $(Carrier, \sigma_n) : \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(\overrightarrow{Geom}(X)) \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X)$ tel que pour toute trace $\langle p \rangle$ de $\overrightarrow{Geom}(X)$, $\sigma_{n, \langle p \rangle}$ est un isomorphisme. Pour cela, on va construire pour toute trace $\langle p \rangle$ de x vers y , une fonction continue $\sigma_{\langle p \rangle} : \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \longrightarrow \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(Carrier(x), Carrier(y))$ qui soit une équivalence d'homotopie et telle que pour tout prolongement $(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle)$ de $\langle p \rangle$ (de x vers y) vers $\langle \alpha \star p \star \beta \rangle$ (de x' vers y') le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) & \xrightarrow{\sigma_{\langle p \rangle}} & \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(Carrier(x), Carrier(y)) \\ \downarrow \overrightarrow{\mathbb{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) & & \downarrow \overrightarrow{\mathbb{T}}(X)(Carrier(\langle \alpha \rangle), Carrier(\langle \beta \rangle)) \\ \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y') & \xrightarrow{\sigma_{\langle \alpha \star p \star \beta \rangle}} & \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(X)(Carrier(x'), Carrier(y')) \end{array}$$

soit commutatif modulo homotopie c'est-à-dire $\sigma_{\langle \alpha \star p \star \beta \rangle} \circ \overrightarrow{\mathbb{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle)$ et $\overrightarrow{\mathbb{T}}(X)(Carrier(\langle \alpha \rangle), Carrier(\langle \beta \rangle)) \circ \sigma_{\langle p \rangle}$ sont homotopes. Cela signifie que cela n'induit pas forcément un morphisme entre les systèmes de traces mais que si on note $\sigma_{n, \langle p \rangle} = H_{n-1}(\sigma_{\langle p \rangle})$ alors ces morphismes de groupes sont des isomorphismes et induisent un morphisme de systèmes naturels $(Carrier, \sigma_n) : \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(\overrightarrow{Geom}(X)) \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{H}}_n(X)$ comme voulu.

Etant donné un dichemin α de x' vers x , nous noterons α_* (resp. α^*) n'importe quelle fonction de $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y)$ dans $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y)$ avec $x \leq_X y$ (resp. de $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(z, x')$ dans $\overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(z, x)$ avec $z \leq_X x$) qui a $\langle p \rangle$ associe $\langle \alpha \star p \rangle$ (resp. $\langle p \star \alpha \rangle$). En particulier, $\overrightarrow{\mathbb{T}}(\overrightarrow{Geom}(X))(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) = \alpha_* \circ \beta^*$. Si $x = [(Carrier(x), (x_1, \dots, x_n))] \in \overrightarrow{Geom}(X)$, on note $x_- = [(Carrier(x), (\min(x_1, \frac{1}{2}), \dots, \min(x_n, \frac{1}{2})))]$ et $x_+ = [(Carrier(x), (\max(x_1, \frac{1}{2}), \dots, \max(x_n, \frac{1}{2})))]$. On remarque que $Carrier(x_-) = Carrier(x) = Carrier(x_+)$. On note alors $\gamma_{x,-} : [0, 1] \longrightarrow \overrightarrow{Geom}(X)$ qui à t associe $[(Carrier(x), (t.x_1 + (1-t).\max(x_1, \frac{1}{2}), \dots, t.x_n + (1-t).\min(x_n, \frac{1}{2})))]$, dichemin de x_- vers x . De la même façon on définit $\gamma_{x,+}$ dichemin de x vers x_+ . On note alors $\mu_{x,-} : [0, 1] \longrightarrow \overrightarrow{Geom}(X)$ qui à t associe $[(Carrier(x), (t.\frac{1}{2} + (1-t).\max(x_1, \frac{1}{2}), \dots, t.\frac{1}{2} + (1-t).\min(x_n, \frac{1}{2})))]$, dichemin de x_- vers $\overrightarrow{Geom}(X)(Carrier(x)) = [(Carrier(x), (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}))]$. De la même façon on définit $\mu_{x,+}$ dichemin de $[(Carrier(x), (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}))]$ vers x_+ .

Lemme 3. $(\gamma_{x,-})_*$, $(\gamma_{x,+})^*$, $(\mu_{x,-})_*$ et $(\mu_{x,+})^*$ sont des équivalences d'homotopie.

Démonstration. Nous le démontrons pour $(\gamma_{x,-})_* : \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \longrightarrow \overrightarrow{\mathfrak{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x_-, y)$ avec $x \leq_X y$.

On commence par définir $\nu : \overrightarrow{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x_-, y) \longrightarrow \overrightarrow{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y)$ comme suit : soit p un dichemin de x_- vers y , soit c_0, \dots, c_k sa carrier sequence et soient $t_0, \dots, t_{k+1} \in [0, 1]$ associés. Si $t_0 \leq t \leq t_1$, $\nu(p)(t) = [(c_0, (\max(p(t)_1, x_1), \dots, (\max(p(t)_n, x_n)))]$. En particulier, $\nu(p)(t_0) = [(c_0, (\max((x_-)_1, x_1), \dots, (\max((x_-)_n, x_n)))] = x$ et $Carrier(\nu(p)(t_1)) = Carrier(p(t_1))$ et $\nu(p)(t_1) \leq_X y$. Supposons $\nu(p)$ construit jusqu'à t_i avec $Carrier(\nu(p)(t_i)) = Carrier(p(t_i))$ et

$\nu(p)(t_1) \leq_X y$. On note $[(c_i, (z_1^i, \dots, z_{n_i}^i))] = \nu(p)(t_i)$. Si $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $\nu(p)(t) = [(c_i, (\max(p(t)_1, z_1^i), \dots, (\max(p(t)_{n_i}, z_{n_i}^i)))]$. On construit ainsi $\nu(p)$ par récurrence sur i . C'est un dichemin tel que $\nu(p)(0) = x$ et $y \leq_X \nu(p)(1) \leq_X y$ donc comme \leq_X est un ordre partiel (par hypothèse) $\nu(p)$ est un dichemin de x vers y et ν est bien définie. De plus, ν passe aux traces : si p et q sont des dichemins égaux modulo reparamétrisation, $\nu(p)$ et $\nu(q)$ aussi. Elle induit donc une fonction $\nu : \vec{\mathcal{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \rightarrow \vec{\mathcal{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y)$. Par construction, $\nu \circ (\gamma_{x,-})_* = id$. Il reste à montrer que $(\gamma_{x,-})_* \circ \nu$ est homotope à l'identité. On remarque que p et $\nu(p)$ ont même carrier sequence et donc p et $(\gamma_{x,-})_* \circ \nu(p)$ aussi. L'homotopie est alors une conséquence du lemme plus général suivant. *.QED.*

Lemme 4. Soient $F, G : \vec{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \rightarrow \vec{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y')$ telles que :

- F et G passent aux traces
- pour tout p , $F(p)$ et $G(p)$ ont même carrier sequence.

Alors les fonctions \tilde{F} et \tilde{G} induites en traces par F et G sont homotopes.

Démonstration. L'homotopie $H : [0, 1] \times \vec{\mathcal{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \rightarrow \vec{\mathcal{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y')$ se construit comme la composée :

$$I \times \vec{\mathcal{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \xrightarrow{id \times (norm \circ \vec{s})} I \times \vec{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y) \xrightarrow{id \times (F \times G)} I \times C(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y') \xrightarrow{\Gamma} \vec{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y') \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \vec{\mathcal{Z}}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y')$$

avec :

- $I = [0, 1]$
- $norm$ et \vec{s} sont définies dans [Rau09]. $norm \circ \vec{s}$ est une fonction continue qui à une trace associe un représentant canonique. En particulier, $\langle norm \circ \vec{s}(p) \rangle = \langle p \rangle$
- $C(\overrightarrow{Geom}(X))(x, y)$ est le sous-espace de $\vec{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y') \times \vec{P}(\overrightarrow{Geom}(X))(x', y')$ des couples de dichemins ayant même carrier sequence
- Γ est définie comme suit : soient $t \in [0, 1]$, p et q des dichemins ayant même carrier sequence. Soit c_0, \dots, c_n cette carrier sequence commune et soit t_0, \dots, t_{n+1} (resp. s_0, \dots, s_{n+1}) dans $[0, 1]$ associés à p (resp. q). Soit $u_i(t) = t.s_i + (1-t).t_i$. Soit $u \in [0, 1]$. Si $u_i(t) \leq u \leq u_{i+1}(t)$, soit $v = \frac{u - u_i(t)}{u_{i+1}(t) - u_i(t)}$ si $u_{i+1}(t) - u_i(t) \neq 0$, 0 sinon.
 $\Gamma(t, p, q)(s) = (1-t).p(v.(t_{i+1} - t_i) + t_i) + t.q(v.(s_{i+1} - s_i) + s_i)$.

Par construction, $\Gamma(0, p, q) = p$.

Donc, $H(0, \langle p \rangle) = \langle F(norm \circ \vec{s}(p)) \rangle = \tilde{F}(\langle p \rangle)$ par définition de \tilde{F} .

De la même façon, $H(1, \langle p \rangle) = \tilde{G}(\langle p \rangle)$. *.QED.*

On définit $\sigma_{\langle p \rangle}$ avec p de x vers y comme $(\gamma_{x,-})_* \circ (\gamma_{y,+})^* \circ ((\mu_{x,-})^*)^{-1} \circ ((\mu_{y,+})^*)^{-1}$ où $((\mu_{x,-})^*)^{-1}$ est l'inverse modulo homotopie de $(\mu_{x,-})_*$ du lemme 3. Le caractère commutatif modulo homotopie du diagramme est une conséquence du lemme 4.

C Dihomologie de fourreaux

Dans cette annexe, nous présentons un autre candidat d'homologie dirigée que nous avons développé durant ce stage, la dihomologie de fourreaux. Nous en étudierons une invariance par une notion de dihomotopie et nous ferons des remarques pour les autres propriétés.

C.1 Catégorie des fourreaux

L'esprit est le même que dans les systèmes naturels. On a une structure de base, un ensemble muni de relations, sur lequel on a des observations, ici deux groupes, sur chaque état, élément de l'ensemble.

Définition 46. Un fourreau $K = (|K|, \sqsubseteq_K, \subseteq_K, (K_\downarrow^v)_{v \in |K|}, (K_\uparrow^v)_{v \in |K|})$ est la donnée :

- d'un ensemble $|K|$
- de deux relations \sqsubseteq_K et \subseteq_K sur $|K|$
- de deux familles de groupes $(K_\downarrow^v)_{v \in |K|}$ et $(K_\uparrow^v)_{v \in |K|}$.

Un morphisme de fourreaux $f : K \rightarrow L$ est la donnée :

- d'une fonction $|f| : |K| \rightarrow |L|$ \sqsubseteq -monotone et \subseteq -monotone
- pour tout $v \in |K|$, de deux morphismes de groupes (abéliens) $f_\downarrow^v : K_\downarrow^v \rightarrow L_\downarrow^{|f|(v)}$ et $f_\uparrow^v : K_\uparrow^v \rightarrow L_\uparrow^{|f|(v)}$.

On note **Sheath**, la catégorie des fourreaux et morphismes de fourreaux.

Intuitivement, l'ensemble va représenter les configurations (dans notre cas, des sous-ensembles), \sqsubseteq_K représentera l'ordre temporel (ici le préordre de Plotkin), \subseteq_K l'ordre spatial (ici l'inclusion) et $(K_\downarrow^v)_{v \in |K|}$ (resp. $(K_\uparrow^v)_{v \in |K|}$) l'observation du passé (resp. du futur). **Sheath** est une catégorie homologique dans le sens de [Gra91a], nous avons donc une notion d'homologie de fourreaux. Cependant, nous définirons directement notre homologie un peu plus loin.

C.2 Bisimulations, équivalence de dihomotopie, réduits

Nous proposons ici une notion d'équivalence de dihomotopie, reposant sur la notion de bisimulation. Cette notion de bisimulation est facilement transposable en termes de fourreaux et permettra une réduction de l'ensemble de base tout en gardant mémoire de toutes les informations.

Nous commençons par définir notre ordre temporel :

Définition 47. Soit X un pospace. On note $\mathcal{P}_\emptyset(X)$ l'ensemble des parties non vides de X . Soit $E \in \mathcal{P}_\emptyset(X)$. On définit $\downarrow E = \{x \in X \mid \exists y \in E. x \leq y\}$ et $\uparrow E = \{x \in X \mid \exists y \in E. x \geq y\}$. On munit $\mathcal{P}_\emptyset(X)$ du préordre de Plotkin \sqsubseteq défini par $E \sqsubseteq E'$ ssi $\downarrow E \subseteq \downarrow E'$ et $\uparrow E \supseteq \uparrow E'$.

Dans la suite, on notera \sim_c l'équivalence d'homotopie classique.

Définition 48. Soient X et Y , deux pospaces.

Une relation $R \subseteq \mathcal{P}_\emptyset(X) \times \mathcal{P}_\emptyset(Y)$ est une bisimulation si pour tout $E \in \mathcal{P}_\emptyset(X)$ et $F \in \mathcal{P}_\emptyset(Y)$, si $(E, F) \in R$ alors $\downarrow E \sim_c \downarrow F$ et $\uparrow E \sim_c \uparrow F$ et :

- pour tout $E' \sqsubseteq E$, il existe $F' \sqsubseteq F$ tel que $(E', F') \in R$
- pour tout $E \sqsubseteq E'$, il existe $F \sqsubseteq F'$ tel que $(E', F') \in R$
- pour tout $F' \sqsubseteq F$, il existe $E' \sqsubseteq E$ tel que $(E', F') \in R$
- pour tout $F \sqsubseteq F'$, il existe $E \sqsubseteq E'$ tel que $(E', F') \in R$.

On dit que E et F sont bisimilaires et on note $E \sim F$ s'il existe une bisimulation R telle que $(E, F) \in R$.

Définition 49. Soient X et Y deux pospaces.

On dit que X et Y sont dihomotopiquement équivalents et on note $X \sim_d Y$ ssi il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ continues croissantes telles que :

- pour tout $E \in \mathcal{P}_\emptyset(X)$, $E \sim f(E)$
- pour tout $F \in \mathcal{P}_\emptyset(Y)$, $F \sim g(F)$.

Nous définissons l'analogue dans les fourreaux. Notons néanmoins que la définition semble plus stricte.

Définition 50. Soient K un fourreau.

Une relation $R \subseteq |K| \times |K|$ est une t-bisimulation si pour tout $u, v \in |K|$, si $(u, v) \in R$ alors K_\downarrow^u et K_\downarrow^v (resp. K_\uparrow^u et K_\uparrow^v) sont isomorphes et :

- pour tout $u' \sqsubseteq_K u$, il existe $v' \sqsubseteq_K v$ tel que $(u', v') \in R$
- pour tout $u \sqsubseteq_K u'$, il existe $v \sqsubseteq_K v'$ tel que $(u', v') \in R$
- pour tout $v' \sqsubseteq_K v$, il existe $u' \sqsubseteq_K u$ tel que $(u', v') \in R$
- pour tout $v \sqsubseteq_K v'$, il existe $u \sqsubseteq_K u'$ tel que $(u', v') \in R$.

On dit que u et v sont t-bisimilaires et on note $u \approx_K^t v$ s'il existe une t-bisimulation R telle que $(u, v) \in R$.

Une relation $R \subseteq |K| \times |K|$ est une st-bisimulation si pour tout $u, v \in |K|$, si $(u, v) \in R$ alors $u \approx_K^t v$ et :

- pour tout $u' \subseteq_K u$, il existe $v' \subseteq_K v$ tel que $(u', v') \in R$
- pour tout $v' \subseteq_K v$, il existe $u' \subseteq_K u$ tel que $(u', v') \in R$.

On dit que u et v sont st-bisimilaires et on note $u \approx_K v$ s'il existe une st-bisimulation R telle que $(u, v) \in R$.

Lemme 5. \approx_K^t est une t-bisimulation et une relation d'équivalence.

\approx_K est une relation d'équivalence.

Nous définissons enfin le réduit, qui regroupe toutes les informations redondantes :

Définition 51. Un réduit d'un fourreau K est un fourreau L tel que :

- $|L| = |K| / \approx_K$
- $[u] \sqsubseteq_L [v]$ (resp. $[u] \subseteq_L [v]$) ssi il existe $u' \in [u]$ et $v' \in [v]$ tels que $u' \sqsubseteq_K v'$ (resp. $u' \subseteq_K v'$)
- pour tout $v \in |K|$, $L_{\downarrow}^{[v]}$ (resp. $L_{\uparrow}^{[v]}$) est isomorphe à K_{\downarrow}^v (resp. K_{\uparrow}^v).

Il existe toujours un réduit, mais il n'est unique qu'à isomorphisme près. On parlera néanmoins du réduit et on le notera K_{\approx} .

C.3 Dihomologie, dihomologie réduite

Définition 52. $\overrightarrow{H}_n(X)$ est le fourreau défini par :

- $|\overrightarrow{H}_n(X)| = \mathcal{P}_{\emptyset}(X)$
- $\sqsubseteq_{\overrightarrow{H}_n(X)} = \sqsubseteq$, le préordre de Plotkin
- $\subseteq_{\overrightarrow{H}_n(X)} = \subseteq$, l'inclusion
- pour tout $E \in \mathcal{P}_{\emptyset}(X)$, $(\overrightarrow{H}_n(X))_{\downarrow}^E = H_n(\downarrow E)$
- pour tout $E \in \mathcal{P}_{\emptyset}(X)$, $(\overrightarrow{H}_n(X))_{\uparrow}^E = H_n(\uparrow E)$.

On définit le morphisme de fourreaux $\overrightarrow{H}_n(f) : \overrightarrow{H}_n(X) \longrightarrow \overrightarrow{H}_n(Y)$ par :

- $|\overrightarrow{H}_n(f)|(E) = f(E)$
- pour tout σ cycle dans $\downarrow E$, $(\overrightarrow{H}_n(f))_{\downarrow}^E([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ (idem pour \uparrow).

Cette construction est fonctorielle.

Comme dans les systèmes naturels, nous pourrions définir la dihomologie indirectement à partir de l'homologie de fourreaux provenant de la théorie des catégories homologiques. Nous obtenons la même définition qu'ici et cela nous permettrait d'étudier les propriétés théoriques de celle-ci.

Définition 53. On définit l'homologie réduite comme étant le réduit $\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx}$.

C.4 Invariance par dihomotopie

Voici le résultat principal de cette annexe. C'est un théorème d'invariance de la dihomologie par la notion de d'équivalence d'homotopie (propriété A).

Théorème 11 (invariance par dihomotopie). *Si $X \sim_d Y$ alors pour tout n , $\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx}$ et $\overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx}$ sont isomorphes.*

Démonstration.

Soient f et g de la définition de dihomotopiquement équivalents. On va construire $\tilde{f} : \overrightarrow{H}_n(X)_{\approx} \longrightarrow \overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx}$ et $\tilde{g} : \overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx} \longrightarrow \overrightarrow{H}_n(X)_{\approx}$ inverses l'un de l'autre.

Soient E et $E' \in \mathcal{P}_{\emptyset}(X)$ tels que $E \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)} E'$. Montrons que $f(E) \approx_{\overrightarrow{H}_n(Y)} f(E')$.

Soit R une st-bisimulation sur $\overrightarrow{H}_n(X)$ telle que $(E, E') \in R$.

Pour tout $(F, F') \in R$, $F \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)}^t F'$. Soit $R_{F, F'}$, une t-bisimulation sur $\overrightarrow{H}_n(X)$ telle que $(F, F') \in R_{F, F'}$.

Comme $F \sim f(F)$, soit Q_F une bisimulation telle que $(F, f(F)) \in Q_F$.

Soit $S_{F, F'} = Q_{F'} \circ R_{F, F'} \circ Q_F^{-1}$. C'est une t-bisimulation sur $\overrightarrow{H}_n(Y)$ telle que $(f(F), f(F')) \in S_{F, F'}$.

Donc, $f(F) \approx_{\overrightarrow{H}_n(Y)}^t f(F')$.

Soit $\tilde{R} = \{(f(F), f(F')) | (F, F') \in R\}$. C'est une st-bisimulation telle que $(f(E), f(E')) \in \tilde{R}$.

La seule chose à vérifier est que c'est bien une st-bisimulation : soit $(f(F), f(F')) \in \tilde{R}$ et soit $G \subseteq f(F)$.

Comme $(F, F') \in R$, $f(F) \approx_{\overrightarrow{H}_n(Y)}^t f(F')$.

$G = f(H)$ avec $H = F \cap f^{-1}(G) \subseteq F$. Donc, il existe $H' \subseteq F'$ tel que $(H, H') \in R$ car R est une st-bisimulation.

Donc, $(f(H), f(H')) \in \tilde{R}$ et \tilde{R} est une st-bisimulation.

On en déduit donc que $f(E) \approx_{\overrightarrow{H}_n(Y)} f(E')$.

On peut alors définir $|\tilde{f}| : \mathcal{P}_{\emptyset}(X) / \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)} \longrightarrow \mathcal{P}_{\emptyset}(Y) / \approx_{\overrightarrow{H}_n(Y)}$ par $|\tilde{f}|([E]) = [f(E)]$. Idem pour $|\tilde{g}|$.

Montrons que $|\tilde{f}|$ est \sqsubseteq -monotone.

Soient $[E] \sqsubseteq_{\overrightarrow{H}_n(X)} [E']$ ie. il existe $F \in [E]$ et $F' \in [E']$ tels que $F \sqsubseteq F'$. Comme on l'a déjà vu, $f(F) \sqsubseteq f(F')$ et comme $[f(F)] = [f(E)]$ et $[f(F')] = [f(E')]$ (car $[F] = [E]$ et $[F'] = [E']$), $[f(E)] \sqsubseteq_{\overrightarrow{H}_n(Y)} [f(E')]$.

De la même façon, $|\tilde{f}|$ est \subseteq -monotone. Idem pour $|\tilde{g}|$.

Montrons que $|\tilde{f}|$ et $|\tilde{g}|$ sont inverses l'un de l'autre. Montrons donc que $E \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)} g(f(E))$.

Pour tout $F \subseteq E$, comme $F \sim g(f(F))$, soit R_F une bisimulation telle que $(F, g(f(F))) \in R$. En particulier, c'est une t-bisimulation sur $\overrightarrow{H}_n(X)$ donc $F \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)}^t g(f(F))$.

Soit $Q = \{(F, g(f(F))) | F \subseteq E\}$. Montrons que c'est une st-bisimulation.

Pour tout $F \subseteq E$, $F \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)}^t g(f(F))$. Soit $G \subseteq F$. $g(f(G)) \subseteq g(f(F))$ et $(G, g(f(G))) \in Q$.

Soit $G \subseteq g(f(F))$. $G = g(f(H))$ avec $H = F \cap (g \circ f)^{-1}(G) \subseteq F$ et $(H, g(f(H))) \in Q$.

On en déduit que $E \approx_{\overrightarrow{H}_n(X)} g(f(E))$ ie. $|\tilde{g}| \circ |\tilde{f}| = id$.

De la même façon, $|\tilde{f}| \circ |\tilde{g}| = id$.

Par définition des réduits, $(\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx})_{\downarrow}^{[E]}$ (resp. $(\overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx})_{\downarrow}^{[F]}$) est isomorphe à $(\overrightarrow{H}_n(X))_{\downarrow}^E$ (resp. $(\overrightarrow{H}_n(Y))_{\downarrow}^F$).

Comme $E \sim f(E)$, en particulier $(\overrightarrow{H}_n(X))_{\downarrow}^E$ est isomorphe à $(\overrightarrow{H}_n(Y))_{\downarrow}^{f(E)}$.

Donc $(\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx})_{\downarrow}^{[E]} = (\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx})_{\downarrow}^{[g(f(E))]}$ est isomorphe à $(\overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx})_{\downarrow}^{[f(E)]}$.

On définit alors $\tilde{f}_{\downarrow}^{[E]} : (\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx})_{\downarrow}^{[E]} \rightarrow (\overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx})_{\downarrow}^{[f(E)]}$ comme étant un isomorphisme quelconque entre ces groupes et $\tilde{g}_{\downarrow}^{[F]} : (\overrightarrow{H}_n(Y)_{\approx})_{\downarrow}^{[F]} \rightarrow (\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx})_{\downarrow}^{[g(F)]}$ comme l'inverse de $\tilde{f}_{\downarrow}^{[g(F)]}$.

On procède de la même façon pour \uparrow .

\tilde{f} et \tilde{g} sont alors bien définis et inverses l'un de l'autre.

.QED.

C.5 Propriété B

Dans ce cadre, nous n'avons pas de théorème de Hurewicz comme dans les systèmes naturels, parce qu'il n'y a pas de manière naturelle de pointer les configurations (ce qui est nécessaire pour en prendre l'homotopie). Cependant, le problème récurrent des diverses propositions d'homologie dirigée sur la boîte d'allumettes n'apparaît pas ici. En effet, si on considère comme configuration $\{\gamma\delta\}$, sa clôture vers le bas est homotopiquement équivalente à un cercle et donc son H_1 est isomorphe à \mathbb{Z} . Cela signifie que la dihomologie de fourreaux de celle-ci n'est pas triviale (alors que son homologie classique l'est).

C.6 Théorème de préservation des suites exactes

Tout ce que nous avons pu dire dans les systèmes naturels à propos des suites exactes (semi-exactitude, caractère homologique, caractère abélien lorsque l'on fixe la structure de base, théorèmes de préservation) est aussi valable dans les fourreaux.

C.7 Méthode de calculs

Nous aimerions, pour pouvoir faire des calculs, faire le lien entre la dihomologie de fourreaux et une définition discrète directement à partir d'un ensemble pré-cubique, comme dans les systèmes naturels. Ce lien devra se faire sur les réduits. En effet, on ne peut pas espérer beaucoup mieux, par exemple comparer directement les structures non réduites, rien que par un argument de cardinalité... Pendant, ce stage nous avons entamé l'étude de ce type de résultats dans le cas des fourreaux. Mais d'abord, définissons l'analogue discret de la dihomologie de fourreaux. Elle repose sur la notion de cubifié :

Définition 54. Soit X un ensemble pré-cubique. Soit $A \subseteq \text{Geom}(X)$. On définit $\mathcal{C}(A)$, le cubifié de A comme étant

$$\{x \in \text{Geom}(X) \mid \exists y \in A, \text{carrier}(x) = \text{carrier}(y)\}$$

ou encore

$$\{[(\alpha, t)] \mid \alpha \in X_n, t \in I^n \setminus \partial I^n \text{ tel que } \exists t' \in I^n \setminus \partial I^n \text{ et } [(\alpha, t')] \in A\}$$

On définit $\overrightarrow{H}_n(X)$ comme le sous-fourreau plein de $\overrightarrow{H}_n(\text{Geom}(X))$ dont l'ensemble sous-jacent est $\{\mathcal{C}(A) \mid \emptyset \neq A \subseteq \text{Geom}(X)\}$.

et on voudrait :

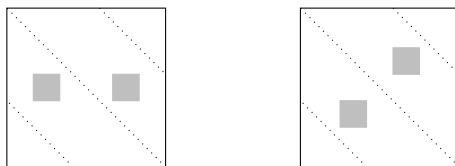
Conjecture 1. $\overrightarrow{H}_n(X)_{\approx}$ et $\overrightarrow{H}_n(\text{Geom}(X))_{\approx}$ sont isomorphes.

Si jamais ce résultat est vrai, cela nous un espoir de trouver un algorithme pour calculer l'homologie réduite d'un pospace qui est la réalisation géométrique d'un ensemble pré-cubique.

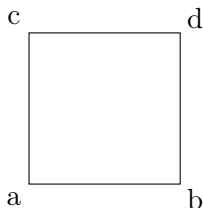
D Lien avec l'homologie persistante

Nous finirons par faire un lien entre notre homologie dirigée et l'homologie persistante (voir [Car09]). Contrairement à la dihomologie (où l'espace est muni d'un ordre), en homologie persistante, l'espace 'change' au cours du temps et l'homologie sert à calculer les trous qui apparaissent et disparaissent. En réalité, on peut faire évoluer l'espace suivant plusieurs paramètres. Le calcul de cette homologie persistante repose également sur la mise sous forme normale de Smith, mais cette fois-ci dans un anneau de polynômes. En effet, maintenant les cubes ont un temps d'apparition (dans le cas unidimensionnel) et donc les fonctions bords codent également le temps qu'il faut pour voir apparaître ce cube. Par exemple, si le segment $[0, 1]$ apparaît au temps $t + 1$, 0 (resp. 1) apparaît au temps t (resp. $t + 1$), le bord de $[0, 1]$ sera l'élément du $\mathbb{R}[X]$ -module engendré par 0 et $1 : 1 - X$ signifiant que 0 et 1 sont les bords de $[0, 1]$ comme précédemment, mais aussi que 1 est apparu en même temps que $[0, 1]$ alors que 0 , un temps avant.

On voit donc que l'homologie persistante a une interprétation en terme d'évolution du temps et on aimerait voir ici, si on ne pourrait pas la lier avec l'idée de dihomologie. Intuitivement, ce que l'on essayait de faire avec la dihomologie naturelle, c'est de regarder comment évolue l'espace entre deux points lorsque l'on fait varier ces deux points. Des tentatives avaient été faites pour voir quelles étaient les informations obtenues en faisant varier un point suivant une diagonale. Voici un exemple :



L'espace à l'instant t est ici l'ensemble des points (x, y) tels que $x + y \leq t$. On remarque que l'évolution de ces deux espaces est la même : on observe d'abord rien, puis un trou, puis deux. Cependant, ces deux espaces ne doivent pas être équivalents : ils n'ont pas le même nombre de dichemins modulo dihomotopie (3 pour le premier, 4 pour le second) ; ils viennent de PV-programmes non équivalents $(P(a).V(a).P(a).V(a)|P(a).V(a))$ pour le premier, $P(a).V(a).P(b).V(b)|P(b).V(b).P(a).V(a)$ pour le second). Cet exemple montre que l'on doit pouvoir faire varier le point de manière plus libre, ce qui motive l'utilisation d'homologie persistante multidimensionnelle, concrètement, une variable par dimension. Durant ce stage, nous avons pris le parti de faire varier les deux points, de manière libre. Ceci demande à modifier légèrement l'interprétation de l'homologie persistante : maintenant, les cubes ont un temps d'apparition et un temps de disparition. Concrètement, cela revient à considérer deux variables par dimension. Faisons un exemple simple :



A chaque cube α , on va associer ses temps $\mu(\alpha)$ d'apparition et de disparition de cette façon : soit α_1 (resp. α_2) le point le plus petit (resp. grand) de α . Par exemple, $a_1 = a_2 = a$, $[a, b]_1 = a$, $[a, b]_2 = b$, ... $\mu(\alpha) = (\text{coordonnées de } \alpha_2, \text{ coordonnées de } \alpha_1)$. Par exemple, $\mu(a) = (0, 0, 0, 0)$, $\mu(b) = (1, 0, 1, 0)$, $\mu([a, b]) = (1, 0, 0, 0)$. Intuitivement, le temps d'apparition d'un cube est le moment à partir duquel tous ses points sont apparus et le temps de disparition est le temps à partir duquel au moins un de ses points a disparu. On définit alors quelque chose de semblable à l'homologie cubique :

- $C_n =$ le $\mathbb{R}[s_1, s_2, t_1, t_2]$ (polynômes réels à 4 indéterminées) module libre engendré par les n -cubes. Ici, $C_0 = (\mathbb{R}[s_1, s_2, t_1, t_2])[a, b, c, d]$ ie. l'ensemble des $P_a.a + P_b.b + P_c.c + P_d.d$ où les $P_\alpha \in \mathbb{R}[s_1, s_2, t_1, t_2]$,
 $C_1 = (\mathbb{R}[s_1, s_2, t_1, t_2])[a, b], [a, c], [b, d], [c, d], \dots$
- $\partial(\alpha) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j+1} s_1^{\mu(\alpha)_1 - \mu(\delta_j^i(\alpha))_1} s_2^{\mu(\alpha)_2 - \mu(\delta_j^i(\alpha))_2} t_1^{\mu(\delta_j^i(\alpha))_3 - \mu(\alpha)_3} t_2^{\mu(\delta_j^i(\alpha))_4 - \mu(\alpha)_4} \cdot \delta_j^i(\alpha)$. Par exemple, $\partial([a, b]) = t_1.b - s_1.a, \dots$

et de la même façon que dans les groupes, on regarde les défauts d'exactitude de ce complexe de chaînes. Pour ce faire, on peut utiliser les outils d'homologie persistante, reposant principalement sur la mise sous forme normale de Smith [CZ05, CZ09].