Logique

TD n°5 : Sémantique de Kripke

Exercice 1 :

Montrer que pour toute structure de Kripke $\mathcal{K}$, pour tout monde α de $\mathcal{K}$ et toute formule ϕ, si $\mathcal{K}, \alpha \Vdash \phi$, alors pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \Vdash \phi$.

Exercice 2 :

Donner des contre-modèles de Kripke aux formules suivantes (P et Q sont des variables propositionnelles) :

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg\neg P \Rightarrow P$
3. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
4. $\neg P \vee \neg\neg P$
5. $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow P \vee Q$
6. $(\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

Exercice 3 :

On dit qu'un connecteur binaire $\otimes$ est indépendant d'un ensemble de connecteurs C s'il n'existe pas de formule ϕ dont les variables sont P et Q et ne contenant que des connecteurs de C telle que

$$\vdash (P \otimes Q) \Leftrightarrow \phi$$

soit prouvable en logique intuitionniste.

1a. Montrer que pour toutes formules ϕ et ψ,

$$\vdash \neg\neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi) \text{ et } \vdash \neg\neg(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\neg\phi \Rightarrow \neg\neg\psi)$$

sont prouvables en logique intuitionniste.

1b. Montrer que si $\vee$ n'est pas indépendant de $\{\bot, \wedge, \neg, \Rightarrow\}$ alors $\vdash \neg\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\neg\phi \vee \neg\neg\psi)$ est prouvable en logique intuitionniste.

1c. Donner un contre modèle de Kripke de $\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg P \vee \neg\neg Q$. Conclure.

On considère la structure de Kripke K suivante : elle a trois mondes $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ avec $\omega_1 \leq \omega_3$ et $\omega_2 \leq \omega_3$ et $I(P) = \{\omega_1, \omega_3\}$, $I(Q) = \{\omega_2, \omega_3\}$.

$$\begin{tikzcd} & \omega_3 : P, Q & \\ \omega_1 : P \arrow[ur] & & \omega_2 : Q \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

2a. Montrer que pour toute formule ϕ ne contenant que X, Y, $\bot$, $\neg$, $\vee$ et $\Rightarrow$, si $\omega_3 \Vdash \phi$ alors $\omega_1 \Vdash \phi$ ou $\omega_2 \Vdash \phi$.

2b. Déduire que $\wedge$ est indépendant de $\{\bot, \vee, \neg, \Rightarrow\}$.

Exercice 4 :

Dans cet exercice, nous allons voir une autre sémantique de la logique intuitionniste, la **sémantique de Tarski**. Dans cette sémantique, les formules sont interprétées comme des ouverts dans un espace topologique. Prenons par exemple la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de la topologie générée par les segments ouverts $]x, y[$ avec $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x < y$. Soit I une interprétation de Tarski, i.e., une fonction des variables propositionnelles dans les ouverts de $\mathbb{R}$. On interprète une formule ϕ par un ouvert ϕ_I par récurrence sur ϕ :

— $P_I = I(P)$,
— $\bot_I = \varnothing$,
— $\top_I = \mathbb{R}$,
— $(\phi \wedge \psi)_I = \phi_I \cap \psi_I$,
— $(\phi \vee \psi)_I = \phi_I \cup \psi_I$,
— $(\neg\phi)_I =$ intérieur du complémentaire de ϕ_I,
— $(\phi \Rightarrow \psi)_I = (\neg\phi \vee \psi)_I$.

Un jugement $\Gamma \vdash \phi$ est valide dans la sémantique de Tarski si pour toute interprétation de Tarski I, $\bigcap_{\psi \in \Gamma} \psi_I \subseteq \phi_I$.

1. Montrer que les règles de la déduction naturelle intuitionniste sont correctes vis-à-vis de la sémantique de Tarski.
2. Montrer que $\vdash P \vee \neg P$ n'est pas valide.

Exercice 5 :

Soit ϕ une formule propositionnelle démontrable en logique classique (ou tautologie). On note F_2 l'ensemble ordonné $\alpha \leq \beta$. On appellera structure de base F_2 toute structure de Kripke dont l'ensemble ordonné sous-jacent est F_2. On note $LI + \phi$ l'ensemble de formules démontrables en ajoutant à la déduction naturelle intuitionniste la règle suivante :

$$\frac{}{\vdash \phi[P_1 \leftarrow \psi_1, \ldots, P_n \leftarrow \psi_n]}$$

où P_1, …, P_n sont les variables de ϕ et ψ_1, …, ψ_n sont des formules quelconques. Par exemple, $LI + (P \vee \neg P)$ est exactement l'ensemble LC des formules démontrables en logique classique.

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Yankov : *pour toute tautologie ϕ, $LI + \phi = LC$ si et seulement si ϕ est réfutée dans une structure de base F_2.*

1. Montrer que si $LI + \phi = LC$ alors ϕ est réfutée dans une structure de base F_2.
2. Supposons que ϕ n'a qu'une variable P. Soit $\mathcal{K}$ la structure de base F_2 telle que $I(P) = \{\beta\}$. Montrer que si ϕ est réfutée dans $\mathcal{K}$ alors toute structure $\mathcal{K}'$ qui satisfait ϕ vérifie que si pour un certain monde ω de $\mathcal{K}'$, $\omega \notin I(P)$, alors pour tout $\omega' \geq \omega$ dans $\mathcal{K}'$, $\omega' \notin I(P)$.
3. Déduire que si ϕ est une formule avec une seule variable P et que si K réfute ϕ alors $\phi \vdash \neg\neg P \Rightarrow P$ est valide en logique intuitionniste.
4. Soit ϕ une formule dont les variables sont P_1, …, P_n. Montrer que si ϕ est réfutée dans une structure de base F_2 alors il existe des formules ψ_1, …, ψ_n n'ayant que P comme variable et telles que K réfute $\phi[P_1 \leftarrow \psi_1, \ldots, P_n \leftarrow \psi_n]$.
5. Déduire le théorème de Yankov.
6. Déduire que si ϕ_1, …, ϕ_n sont des tautologies et que si $LI + \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n = LC$ alors il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $LI + \phi_i = LC$.