Logique

TD n°4 : Systèmes de preuves: classiques et intuitionnistes.

Exercice 1 :

Prouver les séquents suivants en calcul des séquents classique (LK_0), puis les prouver en déduction naturelle classique (NK_0). Lesquels sont prouvables en déduction naturelle intuitionniste (NJ_0) ?

1. $\vdash \neg\neg\phi \to \phi$,
2. $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$,
3. $\vdash \phi \vee \neg\phi$,
4. $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$,
5. $\neg\phi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\phi \vee \psi)$,
6. $\phi \to \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$,
7. $\neg\phi \vee \psi \vdash \phi \to \psi$.

Exercice 2 :

1. Montrer que la déduction naturelle reste complète si on enlève la règle d'affaiblissement.
2. On considère dans cette question une sémantique non-standard du calcul propositionnel. Etant données une formule propositionnelle ϕ et une interprétation I sur les variables de ϕ, on définit $I \vDash^n \phi$ par récurrence sur ϕ :
   - $I \vDash^n \top$ tout le temps,
   - $I \vDash^n \bot$ jamais,
   - $I \vDash^n P$ ssi $P \in I$,
   - $I \vDash^n \neg\phi$ ssi $I \nvDash^n \phi$,
   - $I \vDash^n \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $I \vDash^n \phi_1$ et $I \vDash^n \phi_2$,
   - $I \vDash^n \phi_1 \to \phi_2$ ssi (si $I \vDash^n \phi_1$, alors $I \vDash^n \phi_2$),

   $\star\star$ $I \vDash^n \phi_1 \vee \phi_2$ ssi $I \vDash^n \phi_1$ **et** $I \vDash^n \phi_2$.

   Etant donnés Γ un ensemble de formules et ϕ une formule, on note $\Gamma \vDash^n \phi$ si pour toute interprétation I telle que pour toute formule ψ de Γ $I \vDash^n \psi$, alors $I \vDash^n \phi$. On note NK' le système de déduction naturelle auquel on a enlevé les règles d'introduction du $\vee$ et $\Gamma \vdash_{NK'} \phi$ si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans NK'. Montrer que NK' est correct vis-à-vis de la sémantique non-standard, i.e., si $\Gamma \vdash_{NK'} \phi$ alors $\Gamma \vDash^n \phi$.
3. Déduire que NK' n'est pas complète pour la sémantique standard, i.e., produire un jugement $\Gamma \vdash \phi$ non-prouvable dans NK' mais valide, i.e., $\Gamma \vDash \phi$.

Exercice 3 :

Dans cet exercice, on s'interdit d'utiliser les théorèmes de complétude : on veut montrer une méthode effective de traduction d'un système de preuves dans l'autre. Vous pourrez utiliser la règle de coupure dans LK_0.

1. Montrer que si le jugement $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans NK_0, alors le séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans LK_0. Vous étudierez au moins les cas des règles $\vee I$ et $\vee E$.
2. Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est dans LK_0, alors le jugement $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ est prouvable dans NK_0. Vous étudierez au moins le cas des règles $\vee g$ et $\vee d$.

Exercice 4 :

On définit $T(\phi)$ par récurrence sur ϕ :

— $T(\bot) = \bot$, $T(\top) = \top$,
— $T(P) = \neg\neg P$ pour toute variable propositionnelle P,
— $T(\phi \vee \psi) = \neg\neg(T(\phi) \vee T(\psi))$,
— $T(\phi \wedge \psi) = T(\phi) \wedge T(\psi)$,
— $T(\phi \to \psi) = T(\phi) \to T(\psi)$,
— $T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$.

1. Montrer que pour toute formule ϕ, le jugement $\neg\neg T(\phi) \vdash T(\phi)$ est prouvable dans NJ_0. Vous étudierez au moins les cas suivants : $\bot$, $\neg$, $\wedge$.
2. Déduire que pour toute formule ϕ, si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans NK_0 alors $T(\Gamma) \vdash T(\phi)$ est prouvable dans NJ_0. Vous étudierez au moins les cas suivants : $\wedge I$, $\vee I_1$, $\vee E$ et *Abs*.
3. Montrer que pour toute formule ϕ, $T(\phi) \vdash \phi$ et $\phi \vdash T(\phi)$ sont prouvables dans NK_0.
4. Déduire que, réciproquement, si $T(\Gamma) \vdash T(\phi)$ est prouvable dans NJ_0, alors $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans NK_0.