Logique

TD n°3 : Stratégies de résolution et déduction naturelle

Exercice 1 :

Une clause est **négative** si elle ne contient que des littéraux négatifs. On se propose d'étudier la stratégie suivante de résolution, appelée **stratégie négative** : l'application de la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisses est négative. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \bot$.
2. Si I et J sont des interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :
   a) pour tout $j < k$, P_j est dans le domaine de I et de J et $I(P_j) = J(P_j)$,
   b) P_k est dans le domaine de I et de J, $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.
3. Montrer que $\geq_{lex}$ est un ordre et que pour toutes interprétations partielles I et J, soit $I \leq J$, soit $J \leq I$, soit $I \leq_{lex} J$, soit $J \leq_{lex} I$.
4. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fini, non vide et que toutes ses feuilles sont des nœuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\leq_{lex}$ qui soit un nœud d'échec et qui ne falsifie pas de clause négative de E.
5. Prouver la complétude réfutationelle de $\vdash_\neg$ par la méthode des arbres sémantiques.

Exercice 2 :

On considère ici un autre raffinement de la résolution : la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisses au moins est dans l'ensemble de clauses initial. Cette stratégie est dite **input**.

1. Montrer que l'on ne peut pas dériver $\bot$ à partir de l'ensemble $\{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$ en utilisant la stratégie input. Qu'en déduire ?
2. On dit qu'une clause est **de Horn** si elle ne contient qu'au plus un littéral positif. Montrer que les clauses de Horn sont stables par résolution et factorisation.
3. On se propose de montrer que la stratégie input est réfutationnellement complète pour les clauses de Horn par transformations de preuves. On se fixe un ensemble E de clauses de Horn et on veut montrer par récurrence que pour toute preuve π par résolution d'une clause C à partir de E, il existe une preuve π' de C suivant la stratégie input à partir de E. Pour cela, vous considérerez les grandeurs suivantes :
   - $N(\pi)$ = le nombre de nœuds de π,
   - $H(\pi)$ dont la valeur dépend de la dernière règle utilisée dans π :
     - ⋆ si c'est une résolution :
     $$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{P \vee C_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\neg P \vee C_2}}{C = C_1 \vee C_2}$$
     $H(\pi) = N(\pi_1)$, i.e., la taille de la sous-preuve qui correspond au littéral **positif** résolu,
     - ⋆ si c'est une factorisation :
     $$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{L \vee L \vee C'}}{C = L \vee C'}$$
     $H(\pi) = N(\pi_1)$,

⋆ sinon $H(\pi) = 0$.

Vous ferez alors une preuve par récurrence sur $(N(\pi), H(\pi))$ muni de l'ordre lexicographique (qui est bien fondé).

Exercice 3 :

Prouver en déduction naturelle les jugements suivants :

1. $\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$,
2. $\vdash \neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$,
3. $\vdash \neg P \vee Q \leftrightarrow P \to Q$,
4. $\vdash P \vee \neg P$.

Exercice 4 :

1. Montrer que la déduction naturelle reste complète si on enlève la règle d'affaiblissement.
2. On considère dans cette question une sémantique non-standard du calcul propositionnel. Etant données une formule propositionnelle ϕ et une interprétation I sur les variables de ϕ, on définit $I \vDash^n \phi$ par récurrence sur ϕ :
   - $I \vDash^n \top$ tout le temps,
   - $I \vDash^n \bot$ jamais,
   - $I \vDash^n P$ ssi $P \in I$,
   - $I \vDash^n \neg\phi$ ssi $I \nvDash^n \phi$,
   - $I \vDash^n \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $I \vDash^n \phi_1$ et $I \vDash^n \phi_2$,
   - $I \vDash^n \phi_1 \to \phi_2$ ssi (si $I \vDash^n \phi_1$, alors $I \vDash^n \phi_2$),

   ⋆⋆ $I \vDash^n \phi_1 \vee \phi_2$ ssi $I \vDash^n \phi_1$ **et** $I \vDash^n \phi_2$.

   Etant donnés Γ un ensemble de formules et ϕ une formule, on note $\Gamma \vDash^n \phi$ si pour toute interprétation I telle que pour toute formule ψ de Γ $I \vDash^n \psi$, alors $I \vDash^n \phi$. On note NK' le système de déduction naturelle auquel on a enlevé les règles d'introduction du $\vee$ et $\Gamma \vdash_{NK'} \phi$ si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans NK'. Montrer que NK' est correct vis-à-vis de la sémantique non-standard, i.e., si $\Gamma \vdash_{NK'} \phi$ alors $\Gamma \vDash^n \phi$.
3. Déduire que NK' n'est pas complète pour la sémantique standard, i.e., produire un jugement $\Gamma \vdash \phi$ non-prouvable dans NK' mais valide, i.e., $\Gamma \vDash \phi$.