Logique

TD n°2 : Formes clausales et résolution

Exercice 1 :

Vous avez vu en cours que toute formule possède une forme irréductible unique, modulo l'associativité et la commutativité de $\vee$ et $\wedge$. Montrer que cette unicité est fausse sans associativité et commutativité.

On définit la taille d'une formule ϕ par récurrence structurelle :
— si ϕ est une variable, $|\phi| = 1$,
— si ϕ est de la forme $\neg\phi'$, $|\phi| = 1 + |\phi'|$,
— si ϕ est de la forme $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \to \phi_2$ alors $|\phi| = 1 + |\phi_1| + |\phi_2|$.
On note $\tau(\phi)$, le minimum de $\{|\psi| \mid \psi$ est une forme clausale de $\phi\}$.

Exercice 2 :

Pour n entier, on considère $\phi_n = (P_1 \wedge Q_1) \vee \ldots \vee (P_n \wedge Q_n)$.

1. Montrer que
$$\psi_n = \bigwedge_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} \bigvee_{i \in S} P_i \vee \bigvee_{i \notin S} Q_i$$
est une forme clausale de ϕ_n.
Soit θ_n une forme clausale de ϕ_n de taille minimale.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, toute clause de θ_n contient P_i ou Q_i.
3. Montrer que θ_n ne contient pas de littéral négatif.
4. Montrer que pour tout $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, θ_n contient la clause $\bigvee_{i \in S} P_i \vee \bigvee_{i \notin S} Q_i$.
5. Déduire que ψ_n est une forme clausale de ϕ_n de taille minimale.
6. Déduire que la mise sous forme clausale peut induire une explosion exponentielle.

On définit $w(\phi)$ par récurrence structurelle sur ϕ :
— si ϕ est une variable, $w(\phi) = 1$,
$\to$ **si ϕ est de la forme $\neg\phi'$, $w(\phi) = w(\phi')$,**
— si ϕ est de la forme $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \to \phi_2$ alors $w(\phi) = 1 + w(\phi_1) + w(\phi_2)$.

On dit qu'une formule est sous forme normale négative si elle est irréductible par rapport aux règles de réécriture suivantes :
— $\phi_1 \to \phi_2 \Rightarrow \neg\phi_1 \vee \phi_2$,
— $\neg(\phi_1 \vee \phi_2) \Rightarrow \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$,
— $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \Rightarrow \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$,
— $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$.

Exercice 3 :

1. Montrer que pour toute formule ϕ, et toute forme normale négative ψ de ϕ, $w(\phi) = w(\psi)$.
2. Montrer que pour toute formule ϕ, $w(\phi) \leq |\phi|$ et que si ϕ est sous forme normale négative, $|\phi| \leq 2w(\phi)$.
3. Montrer que pour toute forme normale négative ψ, il existe une forme normale conjonctive θ de ψ telle que :
   — toute clause C de θ vérifie que $w(C) \leq w(\psi)$,
   — θ a au plus $2^{\frac{w(\psi)}{2}}$ clauses.
4. Déduire que $\tau(\phi) \leq (|\phi| + 1)2^{1+\frac{|\phi|}{2}}$.

Exercice 4 :

Dériver $\perp$ par résolution à partir de l'ensemble de clauses :

$$\{P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee Q, \neg P \vee Q\}.$$

Exercice 5 :

Construire l'arbre sémantique de l'ensemble de clauses :

$$\{\neg P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_3\}.$$

Cet ensemble de clauses est-il satisfaisable ?

Une preuve est dite sans boucle si tout chemin dans l'arbre de preuve n'a pas deux fois le même nœud. Une 2-clause est une clause qui contient au plus deux littéraux.

Exercice 6 :

On suppose ici que l'ensemble de variables est fini, de cardinal n.

1. Montrer que si E est un ensemble de 2-clauses insatisfaisable, toute preuve sans boucle de $\perp$ est de longueur polynomiale en n.
   On considère l'ensemble de 2-clauses suivant :
$$E = \{P_n \vee P_{n-1}, \neg P_n \vee P_0, P_n \vee P_0, \neg P_n \vee \neg P_{n-1}\}$$
$$\cup\{\neg P_0 \vee P_k \mid k < n\} \cup \{\neg P_0 \vee \neg P_k \mid k < n\}$$
2. Construire des preuves sans boucle π_k^1 (resp. π_k^2, π_k^3, π_k^4) de $P_0 \vee P_{n-k}$ (resp. $P_0 \vee \neg P_{n-k}$, $P_{n-k} \vee P_{n-k-1}$, $\neg P_{n-k} \vee \neg P_{n-k-1}$) par résolution à partir de E, telles que $|\pi_k^i| \geq 2^k$.
3. Déduire une preuve sans boucle de $\perp$ de taille exponentielle en n. Que peut-on en conclure ?
4. Décrire un algorithme polynomial en n pour décider de la satisfaisabilité d'un ensemble de 2-clauses.

Exercice 7 :

Une clause est négative si elle ne contient que des littéraux négatifs. On se propose d'étudier la stratégie suivante de résolution, appelée stratégie négative : l'application de la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisses est négative. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neq Q\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \perp$.
2. Si I et J sont des interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :
   a) pour tout $j < k$, P_j est dans le domaine de I et de J et $I(P_j) = J(P_j)$,
   b) P_k est dans le domaine de I et de J, $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.

3. Montrer que $\geq_{lex}$ est un ordre et que pour toutes interprétations partielles I et J, soit $I \leq J$, soit $J \leq I$, soit $I \leq_{lex} J$, soit $J \leq_{lex} I$.
4. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fini, non vide et que toutes ses feuilles sont des nœuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\leq_{lex}$ qui soit un nœud d'échec et qui ne falsifie pas de clause négative de E.
5. Prouver la complétude réfutationelle de $\vdash_{\neg}$ par la méthode des arbres sémantiques.