Logique

TD n°1 : Calcul propositionnel : Syntaxe, sémantique et compacité

Exercice 1 :

Donner l'ensemble de tous les modèles de la formule

$$((P \to Q) \vee (\neg P \to \neg Q)) \wedge (Q \wedge R \to \neg P)$$

lorsque $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$.

Exercice 2 :

Montrer que, si $\mathcal{P}$ est fini, alors dans tout ensemble fini de formules de cardinal assez grand (on précisera cette borne), il existe deux formules logiquement équivalentes (i.e. qui ont le même ensemble de modèles).

Exercice 3 :

1. Montrer que, lorsque $\mathcal{P}$ est fini, pour tout ensemble d'interprétations S, il existe un ensemble de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.
2. Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 4 :

Donner un exemple d'un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini et dénombrable.

Exercice 5 :

Soient ϕ, ψ telles que $\phi \models \psi$. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \models \theta$, $\theta \models \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 6 :

1. Montrer pour toutes formules ϕ et ψ, $\phi \to \psi$ est logiquement équivalent à $\neg\phi \vee \psi$. Ainsi, on dit que $\to$ est *définissable* à l'aide de $\vee, \wedge, \neg$.
2. Montrer que $\vee, \wedge, \neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\to$ et de la constante $\bot$. On dit alors que l'ensemble $\{\to, \bot\}$ est *fonctionnellement complet.*

Exercice 7 :

Plus généralement, les connecteurs logiques peuvent être vus comme des fonctions Booléennes. On appelle composition de $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ avec $g_1, ..., g_k : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ la fonction

$$\begin{aligned} Comp(f, g_1, ..., g_k) : \{0,1\}^n &\to \{0,1\} \\ (x_1, ..., x_n) &\mapsto f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n)) \end{aligned}$$

Si F est un ensemble de fonctions Booléennes, on note $A(F)$ le plus petit ensemble de fonctions Booléennes :

— contenant les fonctions de F,

— contenant les projections $\pi_n^i(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$,

— stable par composition, i.e., si $f, g_1, ..., g_k \in A(F)$, alors $Comp(f, g_1, ..., g_k) \in A(F)$.

Pour tout entier $n \geq 1$ on note d_n (resp. c_n) la fonction Booléenne à n arguments qui renvoie 0 (resp. 1) si et seulement si tous ses arguments valent 0 (resp. 1).

1. Montrer que, pour tous $n, m \geq 2$ et $k \geq 1$, $A(c_n, f_\neg) = A(d_m, f_\neg)$ contient toutes les fonctions Booléennes à k arguments.
2. Montrer que toute fonction f de $A(f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow)$ vérifie que $f(1, ..., 1) = 1$. Déduire que $f_\neg$ n'appartient pas à $A(f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow)$.

Exercice 8 :

Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Exercice 9 :

$\{0, 1\}$ est muni de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert. $\{0, 1\}$ muni de cette topologie est ainsi un compact. L'ensemble $\{0, 1\}^A$ des interprétations des formules propositionnelles construites sur A est alors muni de la topologie produit : les ouverts sont les unions (arbitraires) de produits $\Pi_{a \in A} \mathcal{O}_a$ où l'ensemble des $a \in A$ tels que $\mathcal{O}_a \neq \{0, 1\}$ est fini.

Tout produit de compacts étant compact (ce qui est admis), l'espace $\mathcal{I}$ de toutes les interprétations est ainsi un compact.

1. Montrer que, pour toute formule ϕ, l'ensemble des interprétations qui satisfont ϕ est un fermé et un ouvert de $\mathcal{I}$.
2. En déduire que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable.

Exercice 10 :

Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 11 :

Soit E un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On dira que E est *maximal cohérent* si E est satisfaisable et que, pour toute formule ϕ du calcul propositionnel, ou bien $\phi \in E$ ou bien $E \cup \{\phi\}$ est insatisfaisable.

1. Montrer que tout ensemble de formules E satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.
2. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner un ensemble E et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant E.

Exercice 12 :

Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble fini $E' \subseteq E$ indépendant tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.
2. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble E' de formules tel que E' est indépendant et, pour toute formule $\phi \in E'$, $E \models \phi$, pour toute formule $\psi \in E$, $E' \models \psi$.
3. Montrer qu'il n'est pas toujours possible d'avoir (en plus) $E' \subseteq E$.