Logique

TD n°13 : Théorème d'incomplétude et jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé

Exercice 1 :

Soit Φ l'ensemble des formules du premier ordre sans variable libre sur le prédicat $=$ et les symboles de fonctions $\{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$.
Soit $D = \{(n, m) \mid \exists \phi \in \Phi$ et Π preuve de ϕ dans Q, $n = \langle\phi\rangle \wedge m = \langle\Pi\rangle\}$.

1. Prouver que D est énumérable. Soit donc ϕ_D une formule représentant D.
2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toute formule $\phi \in \Phi$:
   (a) $\mathbb{N} \vDash \phi \rightarrow (\exists x.\phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x))$
   (b) $Q \vdash \phi \rightarrow (\exists x.\phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x))$
   (c) $\mathbb{N} \vDash (\exists x.\phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x)) \rightarrow \phi$
   (d) $Q \vdash (\exists x.\phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x)) \rightarrow \phi$

Exercice 2 :

Montrer qu'une théorie est complète si et seulement si deux des ses modèles quelconques sont élémentairement équivalents.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{F} = \{0(0), +(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$. Montrer que la fonction partielle h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(3) = 4$ et $h(4) = 12$ est un isomorphisme partiel. Peut-on étendre h sur $\{3, 4, 6\}$?

Exercice 4 :

Soient $\mathcal{F} = \varnothing$ et $\mathcal{P} = \{R(2), =\}$. On considère la structure S_1 qui consiste en un graphe non-orienté à cinq sommets a_1, ..., a_5, i.e., $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_2), ..., (a_5, a_1), (a_1, a_5)\}$, et la structure S_2 qui consiste en deux copies disjointes de S_1 (ces éléments seront notés b_1, ..., b_5, b'_1, ..., b'_5). Montrer que quels que soient les deux sommets β_1, β_2 choisis dans S_2, il existe deux sommets α_1, α_2 dans S_1 et un isomorphisme partiel qui envoie α_i sur β_i. Qu'en est-il si on choisit trois sommets ?

Exercice 5 :

1. On considère la théorie des ordres denses, montrer qu'elle n'est pas complète en une ligne.
2. On considère la théorie des ordres denses sans points extrémaux, montrer qu'elle est complète. Vous pourrez commencer par comparer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soient $\mathcal{F} = \{s(1), 0(0)\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$ et $\mathcal{T}$ la théorie engendrée par les axiomes suivants :

$$
\begin{array}{rr}
(A_1) & \forall x.\forall y.s(x) = s(y) \rightarrow x = y \\
(A_2) & \forall x.x \neq 0 \rightarrow \exists y.x = s(y) \\
(A_3) & \forall x.0 \neq s(x) \\
(A_4^n, n \geq 1) & \forall x.x \neq s^n(x)
\end{array}
$$

Soient deux modèles M_1 et M_2 de $\mathcal{T}$. On note $d_i(a,b)$ la fonction définie sur le domaine D_i de M_i par :

$$d_i(a,b) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a = s^n_{M_i}(b)\}$$

Ce minimum est $+\infty$ si un tel entier n'existe pas.

1. Montrer que $d_i(s^k_{M_i}(a), a) = k$ et que si $d_i(a,b) + d_i(b,c) < +\infty$, alors

$$d_i(a,b) + d_i(b,c) = d_i(a,c)$$

2. Montrer que si $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, alors il existe b tel que $a = s^k_{M_i}(b)$.
3. On considère un jeu de Ehrenfeucht-Fraïssé sur M_1 et M_2 où les coups successifs de D et S sont donnés par la suite $(a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$, avec pour tout i, $a_i \in D_1$ et $b_i \in D_2$. Montrer que, étant donné un entier n, D a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant suivant :
   - pour tout $i \leq n$, pour tout $j_1, j_2 \leq i$, si $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ alors $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$.
   - pour tout $i \leq n$, pour tout $j \leq i$, si $d_1(a_j, 0_{M_1}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_j, 0_{M_2}) \leq 2^{n-i}$ alors $d_1(a_j, 0_{M_1}) = d_2(b_j, 0_{M_2})$.
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète.
5. Les axiomes A_4^n sont-ils tous nécessaires ? Peut-on en conserver qu'un nombre fini ?