

## TD 9 : couverture de sommets

Soit  $A$  un ensemble,  $|A|$  désigne son cardinal. Soit  $x$  un nombre,  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ . Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f(n) \in \Omega(g(n))$  s'il existe un entier  $n_0$  et une constante  $c > 0$  t.q.  $\forall n \geq n_0 \ f(n) \geq cg(n)$ . Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes adjacentes à ce sommet.

### Partie 1

Soit  $(G_r)_r$  une famille de graphes biparti non-orientés telle que, à  $r$  fixé,  $G_r = (V, E)$  vérifie

- $V = L \uplus R$  et  $R = \bigsqcup_{1 \leq i \leq r} R_i$ . De plus,  $|L| = r$  et  $\forall i \ |R_i| = \lfloor r/i \rfloor$ .
- Pour tout  $i$ , chaque sommet de  $R_i$  est connecté à  $i$  sommets de  $L$  et aucun sommet de  $L$  n'est connecté à plus d'un sommet de  $R_i$ .
- Il n'y a pas d'autre arête.

La figure 1 illustre le cas  $r = 4$ .

**Question 1.** Quel est le degré maximum d'un sommet de  $L$ ? Donnez l'ordre de grandeur du nombre de sommets de  $R$ . Donnez une couverture de sommets de taille minimale.

Soit l'algorithme **naïf** de calcul de couverture de sommets pour un graphe  $G = (V, E)$ .

- On initialise le sous-ensemble  $C$  à vide puis on itère la procédure suivante.
- On cherche une arête  $\{u, v\}$  t.q.  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$ . S'il n'en existe pas alors  $C$  est la couverture recherchée. Sinon on choisit arbitrairement un sommet  $z \in \{u, v\}$  qu'on ajoute à  $C$ .

**Question 2.** Expliquez comment l'algorithme **naïf** peut renvoyer  $R$  comme résultat lorsqu'il est appliqué à  $G_r$ . En déduire que sa garantie de performance appartient à  $\Omega(\log(r))$ .

Soit l'algorithme **moinsnaïf** de calcul de couverture de sommets pour un graphe  $G = (V, E)$ .

- On initialise le sous-ensemble de sommets  $C$  à vide et le sous-ensemble d'arêtes  $E'$  à  $E$  puis on itère la procédure suivante.
- Si  $E'$  est vide alors  $C$  est la couverture recherchée. Sinon on choisit un sommet  $u$  de degré maximal dans le graphe  $G' = (V, E')$  qu'on ajoute à  $C$ . Puis on supprime de  $E'$  toutes les arêtes adjacentes à  $u$ .

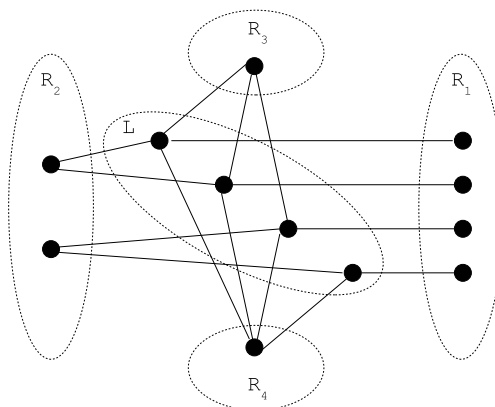
**Question 3.** Expliquez comment l'algorithme **moinsnaïf** peut renvoyer  $R$  comme résultat lorsqu'il est appliqué à  $G_r$ .

On s'intéresse maintenant au problème de la couverture de sommets de poids minimal. On se donne un graphe  $G = (V, E)$  et une pondération  $w : V \mapsto \mathbb{N}^*$ . Il s'agit de trouver une couverture de sommets  $C$  t.q.  $\sum_{v \in C} w(v)$  soit minimal. On notera le graphe pondéré  $G = (V, E, w)$ .

**Question 4.** Montrer que le problème de décision sous-jacent en NP-complet (par réduction de 3-SAT)

Soit l'algorithme **encorenaïf** de calcul de couverture de sommets pour un graphe pondéré  $G = (V, E, w)$ .

- On trie les sommets par poids croissant, on initialise le sous-ensemble  $C$  à vide puis on itère la procédure suivante.

FIGURE 1 – Le graphe  $G_4$ 

- On cherche dans la liste triée le premier sommet  $u$  t.q. il existe une arête  $\{u, v\}$  avec  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$ . S'il n'existe pas alors  $C$  est la couverture recherchée. Sinon on ajoute  $u$  à  $C$ .

Soit  $G = (V, E)$  avec  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  et  $E = \{\{v_0, v_i\}\}_{1 \leq i \leq n}$  (autrement dit une « étoile » de centre  $v_0$ ).

**Question 5.** Proposez une pondération des sommets de ce graphe t.q. l'algorithme `encorenaif` renvoie une couverture de taille  $n$ .

### Partie 2

On suppose dans cette partie que le graphe pondéré  $G = (V, E, w)$  est biparti (i.e.  $V = L \uplus R$  et  $\forall e \in E \ e \cap L \neq \emptyset \wedge e \cap R \neq \emptyset$ ).

On construit un graphe orienté  $G' = (V', E')$  dont les arcs sont pondérés par une fonction  $w'$  de la façon suivante :

- $V' = V \uplus \{s, t\}$ . Le sommet  $s$  est la source et le sommet  $t$  est le puits.
- $E' = \{(s, u) \mid u \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\} \cup \{(u, v) \mid u \in L \wedge v \in R \wedge \{u, v\} \in E\}$ .
- $\forall u \in L \ w'(s, u) = w(u) \wedge \forall v \in R \ w'(v, t) = w(v) \wedge \forall \{u, v\} \in E \ w'(u, v) = M$  avec  $M = 1 + \sum_{u \in L} w(u)$ .

**Question 6.** Soit une  $s$ - $t$  coupe de  $G'$  (i.e. une partition en deux sous-ensembles de sommets l'un  $S$  contenant  $s$  et l'autre  $T$  contenant  $t$ ) dont le poids, défini par  $\sum_{u \in S, v \in T, \{u, v\} \in E'} w'(u, v)$ , est minimal. Montrez que :

1.  $\forall u \in L \ \forall v \in R \ (\{u, v\} \in E \wedge u \in S) \Rightarrow v \in S$ .
2. Soient  $L' = L \cap T$  et  $R' = R \cap S$ . Alors  $R' \cup L'$  est une couverture de poids minimal de  $G$ .

**Question 7.** En déduire un algorithme en temps polynomial pour la couverture de sommets de poids minimal dans un graphe biparti.

### Partie 3

Soit  $S$  un ensemble, un multi-ensemble  $B$  de  $S$  est une fonction de  $S$  dans  $\mathbb{N}$ . Lorsque que  $B$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , on a affaire à un sous-ensemble. On note  $B = \sum_{s \in S} B(s) \cdot s$  et on omet les coefficients unitaires et les termes de coefficient nul. Ainsi si  $S = \{x, y, z\}$ ,  $2 \cdot x + y$  désigne le multi-ensemble  $2 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$ . On étend l'intersection aux multi-ensembles par

$B \cap B' = \sum_{s \in S} \min(B(s), B'(s)) \cdot s$  et l'inclusion par  $B \subseteq B'$  ssi  $\forall s \in S B(s) \leq B'(s)$ . On note  $\text{Supp}(B) = \{s \mid B(s) > 0\}$ .

Soit  $G = (V, E, w)$  un graphe pondéré, une *double couverture*  $C$  de  $G$  est un multi-ensemble de  $V$  t.q.  $\forall \{u, v\} \in E u + v \subseteq C \vee 2 \cdot u \subseteq C \vee 2 \cdot v \subseteq C$ . Le poids d'une double couverture  $C$  est défini par  $\sum_{v \in V} B(v) \cdot w(v)$ . Dans la suite, on cherche des doubles couvertures de poids minimal.

**Question 8.** Montrez qu'il existe une double couverture  $C$  de poids minimal t.q.  $\forall v C(v) \leq 2$ .

Dans la suite, on se restreint donc aux doubles couvertures  $C$  t.q.  $\forall v C(v) \leq 2$ .

**Question 9.** Soit  $C$  une double couverture de  $G$ , montrez que  $\text{Supp}(C)$  est une couverture de  $G$ .

**Question 10.** Soient  $C$  une double couverture de  $G$  de poids minimal  $p$  et  $C'$  une couverture de  $G$  de poids minimal  $p'$ . Montrez que  $p \leq 2p'$ .

Soit  $G = (V, E, w)$  un graphe pondéré, on définit le graphe biparti pondéré  $G' = (V', E', w')$  ainsi :

- $V' = L \uplus R$  avec  $L = \{u^L \mid u \in V\}$  et  $R = \{u^R \mid u \in V\}$ .
- $E' = \{\{u^L, v^R\} \mid \{u, v\} \in E\} \uplus \{\{u^R, v^L\} \mid \{u, v\} \in E\}$ .
- $\forall u \in V w'(u^L) = w'(u^R) = w(u)$ .

**Question 11.** Montrez qu'une couverture  $C'$  de  $G'$  peut être transformée en une double couverture  $C$  de  $G$  de même poids.

**Question 12.** Montrez qu'une double couverture  $C$  de  $G$  peut être transformée en une couverture  $C'$  de  $G'$  de même poids.

**Question 13.** Proposez un algorithme en temps polynomial pour la couverture de sommets de poids minimal qui fournisse une garantie de performance de 2.