Informatique et physique : quelques interactions

Gilles Dowek
(Merci à Pablo Arrighi et à Sarah Houver)

Ce dont cet exposé ne parlera (hélas) pas

Faire de la physique demande de traiter de grandes quantités de données (CERN : 15 Po/an)

Impossible sans (et avant) l'utilisation d'ordinateurs

Pas d'ordinateur, pas de boson

Mais plutôt

L'information est une notion centrale en physique (comme celles de masse, de distance, de temps, d'énergie, d'entropie...)

Information is physical (R. Landauer)

I. Une très vielle idée

$$S = k . \log W$$

Boltzmann

Boltzmann (1877)

Entropie d'un système à l'équilibre dans un certain état macroscopique E

$$S = k \ \ln(\Omega)$$

Ω : nombre d'états microscopiques dans lesquels le système peut évoluer en restant dans l'état E

$$S = k \frac{\log_2(\Omega)}{\log_2(e)} = k \ln(2) \log_2(\Omega)$$

Shannon

Information nécessaire pour connaître un état parmi Ω : $\log_2(\Omega)$

Avec n bits : former 2^n messages qui identifient chacun un état

L'entropie est (à $k \ln(2)$ près) l'information nécessaire pour connaître l'état microscopique quand nous connaissons l'état macroscopique

L'information qui *n'*est *pas* dans sa description macroscopique

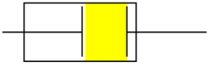
Brillouin (?) : (neg)entropie = information
≪ Entropie ≫ : un mauvais nom pour “(neg)information”

A. Ben-Naim (2008) : *A Farewell to Entropy, Statistical Thermodynamics Based on Information*

II. Le calcul irréversible

Des pistons à la mémoire

N particules, r états possibles chacune



Pour connaître l'état microscopique : $I = \log_2(r^N) = N \log_2(r)$
Même température

$I' = \log_2((2r)^N) = N \log_2(r) + N$

$$I' - I = N$$

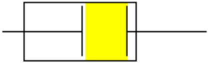
Il faut un bit de plus par particule

$$S' - S = Nk \ln(2)$$

Compresser le gaz

Compresser le gaz lentement et à température constante de

à



en appuyant sur le piston

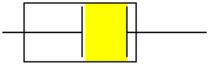
Réversible : récupérer l'énergie mécanique en relâchant le piston
Pas de diminution d'information, pas d'augmentation de l'entropie

Classiquement : apport d'énergie mécanique, transformée en chaleur, dissipée dans le bain : diminution de l'entropie du gaz : $Nk\ln(2)$, augmentation de l'entropie du bain : $Nk\ln(2)$, bilan : 0.
Relâcher le piston en récupérant l'énergie mécanique : le contraire

Détendre sans récupérer l'énergie mécanique

Lentement et à température constante en faisant frotter le piston pour dissiper l'énergie mécanique

De



à

Augmentation de l'entropie : $Nk \ln(2)$

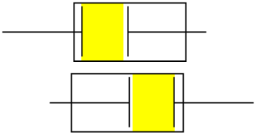
Classiquement : le gaz se détend, refroidit, récupère de la chaleur du thermostat mais le frottement dissipe la même chaleur dans le bain. Augmentation de l'entropie du gaz : $Nk \ln(2)$, variation de l'entropie du bain : 0. Bilan : $Nk \ln(2)$

La thermodynamique du calcul

$N = 1$

0 :

1 :

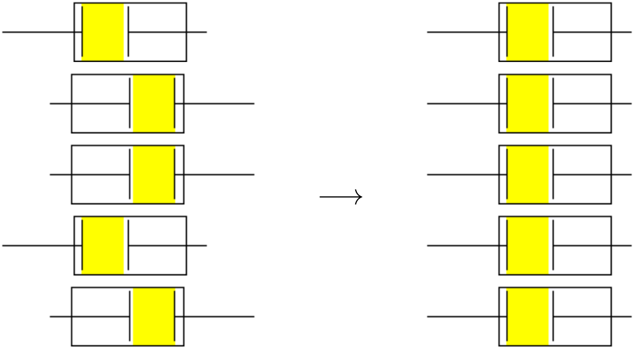


Chaque cylindre mémorise un bit

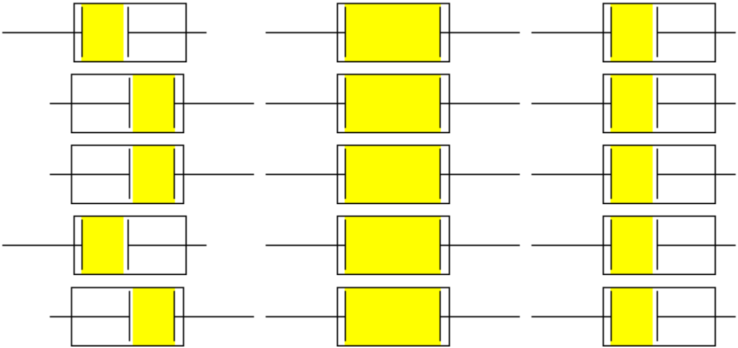
$\neg$: transformer b en $\neg b$ n'augmente pas l'entropie
Réversible (par exemple : retourner le cylindre)

Remise à zéro

```
for i = 0 to 4 t[i] = 0
```



Une première méthode



Augmentation de l'entropie : $k \ln(2)$ par cylindre (bit)

L'entropie totale augmente à la première étape, mais la chaleur est dissipée à la seconde (l'entropie du gaz augmente puis diminue)

Une seconde méthode ?

En fonction de l'état, une négation (retourner le cylindre) ou non

Une seconde méthode ?

En fonction de l'état, une négation (retourner le cylindre) ou non

Vade retro daemon Maxwelli

Le démon lui-même au moins deux états (en train de retourner ou non) il contient un bit d'information qu'il détruit après chaque opération (pour observer le cylindre suivant)

L'entropie du démon augmente de $k \ln(2)$ à chaque opération (retourner ou non)

Landauer-Bennett

Détruire un bit macroscopique augmente l'entropie de $k \ln(2)$

Le démon de Maxwell (de Maxwell)

Depuis Maxwell : le démon doit observer la particule pour décider

Landauer-Bennett : démon a au moins deux états, son entropie augmente de $k\ln(2)$ quand il stocke un bit en observant la particule, puis le détruit (pour observer la particule suivante)

Augmente sa propre entropie de $k\ln(2)$ quand il la diminue celle du gaz de $k\ln(2)$

Comme quand vous 

en

$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

Entropie, destruction d'information et non injectivité

Calculer la fonction

			ΔS
$x \mapsto 0$	:	détruit un bit	$k \ln(2)$
$x \mapsto (x, 0)$	:	injectif	0
$x \mapsto \neg x$	:	injectif	0
$x, y \mapsto x \wedge y$	:	détruit $\frac{3}{4} \log_2(3)$ bits	$\frac{3}{4} \log_2(3) k \ln(2)$
$x, y \mapsto (x, x \wedge y)$	:	détruit $\frac{1}{2}$ bits	$\frac{1}{2} k \ln(2)$
$x, y \mapsto (x, x \otimes y)$	:	injectif	0
$x, y, z \mapsto (x, y, (x \wedge y) \otimes z)$	:	injectif	0

Le calcul réversible

f fonction booléenne

$$x_1, \ldots, x_n \mapsto (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

injective
Peut se programmer exclusivement avec la fonction de Toffoli

$$x, y, z \mapsto (x, y, (x \wedge y) \otimes z)$$

(plus bits ancillaires et parasites)

Un ordinateur qui n'augmente pas l'entropie : ne consomme pas d'électricité, ne produit pas de chaleur, sauf après la fin du calcul pour détruire l'information parasite

III. Ω fini

La définition de Boltzmann présuppose

que le nombre d'états Ω est fini

Une idée qui ne choque pas les informaticiens

Machines de Turing
Von Neumann (mais pas Bush)

La notion de mécanisme selon Gandy

Généralisation des machines de Turing

Mécanisme : système physique formé de pièces dont

- la taille est bornée inférieurement
- le nombre d'états est borné supérieurement

$=$ l'information y a une densité bornée

Le théorème de Gandy

Un mécanisme ne calcule pas davantage qu'une machine de Turing

Mécanismes ?

L'information a-t-elle une densité bornée dans les mécanismes ou en général ?

Le principe de Bekenstein

Jacob Bekenstein (1981) : la quantité d'information qui peut être stockée dans une région de l'espace de rayon R est bornée par

$$I_{max} = \frac{1}{4\ln(2)}\frac{c^3}{\hbar\mathcal{G}}4\pi R^2$$

Premier résultat de Bekenstein : entropie et non information

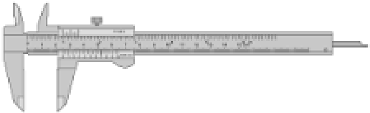
R^2 et non R^3

La constante de Bekenstein $b = 4\ln(2)\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^3} = 7.2\ 10^{-70}\ \mathrm{m}^2$

Un adieu aux réels

Une suite infinie de bits : les décimales d'un réel

exprimé dans la distance des mâchoires d'un



Mais la centième décimale n'a aucun sens physique

IV. De quoi la constante de Planck est-elle la mesure ?

c

Pas juste une constante dans certaines équations : la vitesse de quelque chose
h : l'action de quoi ?

Pas de nom : ~~la constante de Rømer~~, ~~la constante d'Einstein~~ : la vitesse de la lumière
La constante de Planck

Une seule valeur
mais h, $\hbar$...

Unités

Souvent un système d'unité tel que $c = 1$, $\mathcal{G} = 1$, $h = 1$
Définit un étalon pour les distances, les temps, les masses

Ici, juste $c = 1$ et $\mathcal{G} = 1$, distances en m
Les temps et masses sont des distances (tout en m)

En relativité restreinte : t en s $\longrightarrow$ ct en m
En relativité générale : m en kg $\longrightarrow$ $(\mathcal{G}/c^2)m$ en m (demi-rayon Schwarzschild)

c : m s^{-1} et $\mathcal{G}/c^2$: m kg^{-1} constantes de changement d'unité (comme 0.0254 m in^{-1})

Unités

vitesse :	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	$\longrightarrow$	$\mathrm{m^0}$ (scalaire)
quantité de mouvement :	$\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}$	$\longrightarrow$	m
accélération :	$\mathrm{m\ s^{-2}}$	$\longrightarrow$	$\mathrm{m^{-1}}$
force :	$\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$	$\longrightarrow$	$\mathrm{m^0}$
énergie :	$\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$	$\longrightarrow$	m
action :	$\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}$	$\longrightarrow$	$\mathrm{m^2}$

La constante de Planck

$\hbar = 1.054\ 10^{-34}$ m^2 kg s^{-1} homogène à m^2

La constante de Planck en m^2 :

$$a_P = \hbar(\mathcal{G}/c^2)(1/c) = 2.61\ 10^{-70}\ \mathrm{m}^2$$

L'aire de Planck

$$I_{max} = \frac{1}{4\ln(2)}\frac{c^3}{\hbar\mathcal{G}}4\pi R^2 = \frac{1}{4\ln(2)a_P}4\pi R^2$$

$b = 4\ln(2)a_P = 7.2\ 10^{-70}$ m^2 est l'aire d'un bit

Pas h, $\hbar$ ni a_P : $4\ln(2)a_P$

La constante de Planck est l'aire d'un bit

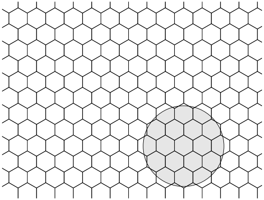
modulo $4\ln(2)$ et dans un mauvais système d'unités

V. Modéliser la physique avec des automates cellulaires

Le théorème de Gandy

Un ~~mécanisme~~ système physique ne calcule pas davantage qu'une machine de Turing

Diviser (arbitrairement) espace en cellules et temps en intervalles



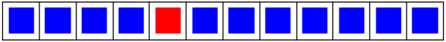
- Chaque cellule a un espace fini d'états (Bekenstein)
- L'état d'une cellule à un instant donné dépend de l'état d'un nombre fini de cellules à l'instant précédent (Einstein)
- La fonction d'évolution est la même partout et tout le temps (homogénéité de l'espace et du temps)

Tout système (peut être simulé par | est) un automate cellulaire

Le mouvement dans un automate cellulaire

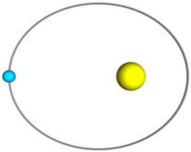
États : $\{q, ..., \}$

Toutes les cellules sont dans l'état q sauf une : la particule
E.g. : 1D



Invariant des règles d'évolution

VI. La relativité générale pour les nuls



La métrique de Schwarzschild

L'attraction gravitationnelle : une modification du tenseur métrique à (t, x, y)

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x^2}{r(r-2m)} - \frac{y^2}{r^2} & -\frac{2mxy}{r^2(r-2m)} \\ 0 & -\frac{2mxy}{r^2(r-2m)} & -\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r(r-2m)} \end{pmatrix}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, m masse de l'étoile en m (i.e. $\frac{\mathcal{G}}{c^2} M$)

Solution de l'équation d'Einstein pour une masse ponctuelle

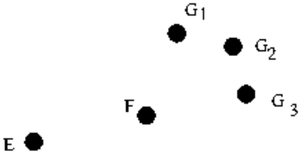
Mouvement de la planète : géodésique pour cette métrique

Difficile de calculer cette géodésique (symboles de Christoffel, équations aux dérivées partielles...)

Qu'est-ce qu'une géodésique dans un automate cellulaire ?

Chemin le plus court et le plus droit entre deux points

Fonction w : $w(E, F, G)$ mesure à quel point E, F, G consiste à aller droit devant soi

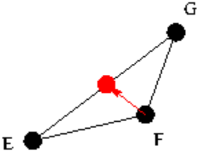


Par exemple : angle externe en F

Par exemple : dérivée de la distance totale d(E,F) + d(F,G) en faisant varier F

Métriques et déviations

$$l(E, F, G) = d(E, F) + d(F, G)$$



Dans le cas continu

$$w(E, \langle t, x, y \rangle, G) =$$
$$(\partial_t l(E, \langle t, x, y \rangle, G))^2 + (\partial_x l(E, \langle t, x, y \rangle, G))^2 + (\partial_y l(E, \langle t, x, y \rangle, G))^2$$

Dans le cas discret : remplacer les dérivées par des différences finies

Du continu au discret

Temps discret, espace continu : $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$ géodésique si pour tout i, $w(E_{i-1}, E_i, E_{i+1}) = 0$

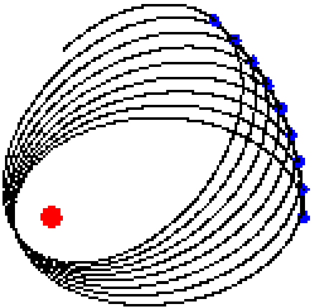
Trop contraignant

$w(E_{i-1}, E_i, E_{i+1})$ minimum pour des variations locales de E_{i+1} : pour les voisins immédiats G de E_{i+1}

$$w(E_{i-1}, E_i, G) \geq w(E_{i-1}, E_i, E_{i+1})$$

Un algorithme :
E_{i-1}, E_i donné
Tirer aléatoirement E_{i+1}
Tant que $w(E_{i-1}, E_i, E_{i+1})$ n'est pas un minimum local remplacer E_{i+1} par un meilleur voisin

Une géodésique



- Une fausse planète très près de l'étoile (maximiser les effets relativistes)
- Pas (encore) de résultats similaires pour Mercure : effets très faibles (discrétisation trop grossière)
- Pas encore un automate cellulaire : état présence ou absence de la planète + valeur du tenseur métrique à ce point (remplacer le champ par des particules qui propagent le champ)

Mais

- (Presque) uniquement des entiers dans le programme
- Avance du périhélie 6.27° (prédictions : 6.17°)
- Trajectoire continue à la limite pas $\longrightarrow 0$

Conclusion

Physiciens et informaticiens d'accord sur le fait qu'il est impossible d'encoder une quantité d'information non bornée dans une région bornée

Principe fondamental

Mais les formulations habituelles de la physique (avant Shannon, Bekenstein...) utilisent une notion d'entropie (proto-notion d'information) et des nombres réels (tout en insistant sur le fait que la vingtième décimale n'a pas de sens physique)

Reformulation de la physique : entropie $\longrightarrow$ information, équations différentielles $\longrightarrow$ automates cellulaires

Rend parfois physique plus accessible, e.g. calcul des géodésiques