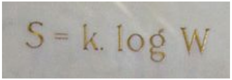
Un chaos discret

Gilles Dowek

I. La densité bornée de l'information

L'entropie selon Boltzmann



Logarithme du nombre de micro-états correspondant à un macro-état

W, $\ln(W)$, fini

Un nombre fini d'états possibles W

Un état contient une quantité finie d'information $\log_2(W)$

De fini à borné

Robin Gandy (1980) : "démonstration" de la forme physique de la thèse de Church-Turing

Jacob Bekenstein (1981) : entropie des trous noirs

Une borne

$$I_{max} = \frac{1}{4\ln(2)} \frac{c^3}{\hbar \mathcal{G}} \; 4\pi R^2$$

R^2 et non R^3

La constante de Bekenstein $b = 4\ln(2)\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^3} = 7.2\ 10^{-70}\ \text{m}^2$

Une hypothèse réfutable (à quand un OPERA de la borne de Bekenstein ?)

De quoi la constante de Planck est-elle la mesure ?

c : dans certaines équations, mais aussi vitesse de quelque chose
h : l'action de quoi ?

Un système d'unité où tout se mesure en mètres ($c = 1$, $\mathcal{G} = 1$)
En relativité restreinte : t en s $\longrightarrow$ ct en m
générale : m en kg $\longrightarrow$ $(\mathcal{G}/c^2)m$ en m (demi-rayon Schwarzschild)

$\hbar = 1.054\ 10^{-34}$ $\mathrm{m^2\ kg\ s^{-1}}$ homogène à $\mathrm{m^2}$

La constante de Planck en $\mathrm{m^2}$ (l'aire de Planck) :

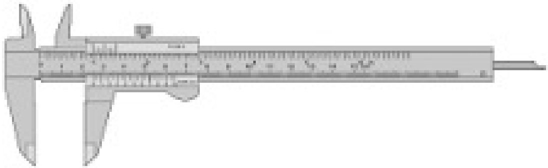
$$a_P = \hbar(\mathcal{G}/c^2)(1/c) = 2.61\ 10^{-70}\ \mathrm{m^2}$$

$$I_{max} = \frac{1}{4\ln(2)}\frac{c^3}{\hbar\mathcal{G}}4\pi R^2 = \frac{1}{4\ln(2)a_P}4\pi R^2$$

La constante de Planck est l'aire d'un bit modulo $4\ln(2)$ et dans un mauvais système d'unités

II. Les nombres réels

Dans la physique de Newton



Distance entre les mâchoires d'un pied à coulisse : un nombre réel

Une infinité de décimales
Une quantité infinie d'information
Contredit le principe d'une densité bornée de l'information

Le principe du pied à coulisse

Mais un pied à coulisse : trois chiffres significatifs
Toute mesure d'une grandeur a une précision bornée
Mais quel est le statut de cet énoncé ?

Un principe fondamental de la physique (comme l'homogénéité de l'espace et du temps, le principe d'inertie...)

Forme archaïque du principe d'une densité bornée de l'information

Les nombres réels sont utilsés en physique parce qu'ils sont pratiques (plus simples que les rationnels)

Bien qu'ils n'aient pas de signification physique (Born)

Mais cela à une conséquence...

III. Le chaos

La sensibilité aux conditions initiales

Itérer une fonction f de $[0,1]$ dans $[0,1]$

$$s_0^x = x$$

$$s_{k+1}^x = f(s_k^x)$$

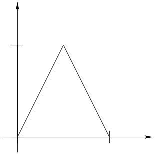
Pour tout η et a, il existe x' et N t.q. $|x - x'| \leq \eta$ et $|s_N^x - s_N^{x'}| \geq a$

$a \leq 1$

Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut déclencher une tornade au Texas

Un exemple : la transformation du boulanger

$b(z) = 2z$ si $z \leq 1/2$ et $b(z) = 2 - 2z$ sinon



Sensible aux conditions initiales en 0

Démarrer avec 0 et $a/2^N$, et après N étapes 0 et a

Une transformation exacte (les papillons cessent de battre des ailes après l'instant 0)

L'évolution déploie toutes les décimales de x (quantité infinie d'information)

Contradictoire avec le principe d'une densité bornée de l'information

Mais aussi... contradictoire avec le principe (beaucoup plus faible) du pied à coulisse : toute mesure d'une grandeur a une précision bornée

Un nouvel instrument de mesure

Supposons un instrument de mesure I_1 de précision 2^{-10}
Et un processus réalisant une transformation du boulanger exacte

Et construisons I_2 : on applique la transformation du boulanger 100 fois à x, en mesurant s_0^x, ..., s_{100}^x avec I_1

Si un résultat entre $1/2 - 2^{-10}$ et $1/2 + 2^{-10}$: échec
Sinon on enregistre pour chaque s_0^x, ..., s_{100}^x s'il est $<$ ou $>$ à $1/2$

Succès si pas de suite de neuf chiffres identiques dans les 110 premiers chiffres de x : taux de succès $\geq 0.815\ldots$

En cas de succès : $x = s_0^x$ avec une précision 2^{-102}

Par récurrence sur i, s_i avec une précision 2^{i-102}

Si $s_{100} < 1/2$, $1/4$, sinon $3/4$, précision $1/4 = 2^{-2}$

Par hypothèse de récurrence, s_{i+1} avec une précision $2^{i+1-102}$
Si $s_i < 1/2$, $s_i = s_{i+1}/2$ sinon $s_i = 1 - s_{i+1}/2$
Dans les deux cas s_i avec une précision $2^{i+1-102}/2 = 2^{i-102}$

Toute cette information dans l'état initial parce que les états sont représentés par des nombres réels

Quid si l'espace des états est fini ?

IV. Un chaos discret

~~Représenter les états par un réel entre 0 et 1~~

Représenter les états par un réel entre 0 et 1, multiple de τ

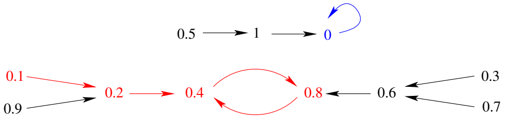
Adapter la définition de la sensibilité aux conditions initiales

Pour tout a, il existe x' et N
t.q. $|x - x'| \leq \tau$ (*i.e.* $x' \in \{x - \tau, x, x + \tau\}$) et $|s_N^x - s_N^{x'}| \geq a$

La transformation du boulanger discrète

Espace d'états : $\{0, 1/10, 2/10, 3/10, ..., 9/10, 1\}$

Pas sensible aux conditions initiales en 0



Plus de chaos ?

Ou devons nous trouver une autre définition ?

Retour au Brésil

Une évolution non perturbée déploie une quantité infinie d'information contenue dans son initial état

Les papillons cessent de battre des ailes après l'instant 0

S'ils continuent : sensibilité aux perturbations

$$s_0^{x,p} = x + p_0$$
$$s_{k+1}^{x,p} = f(s_k^{x,p}) + p_{k+1}$$

Pour tout η et a, il existe p et N
t.q. pour tout k, $|p_k| \leq \eta$ et $|s_N^{x,p} - s_N^{x,0}| \geq a$

$(p_k)_k$: source d'aléa

Dans le cas discret

Pour tout a, il existe p et N
t.q. pour tout k, $|p_k| \leq \tau$ (*i.e.* $p_k \in \{-\tau, 0, \tau\}$) et $|s_N^{x,p} - s_N^{x,0}| \geq a$

Relier les sensibilités

Sensible aux conditions initiales $\Rightarrow$ sensible aux perturbations
Lemme de relèvement : réciproque (sous certaines conditions)

Empaqueter l'information des perturbations dans l'état initial
Exemple

$$x + p_0 \quad \rightarrow \quad 2x + 2p_0 + p_1 \quad \rightarrow \quad 4x + 4p_0 + 2p_1 + p_2$$

Relier les sensibilités

Sensible aux conditions initiales $\Rightarrow$ sensible aux perturbations
Lemme de relèvement : réciproque (sous certaines conditions)

Empaqueter l'information des perturbations dans l'état initial
Exemple

$$\begin{array}{lcl}
x + p_0 & \to & 2x + 2p_0 + p_1 & \to & 4x + 4p_0 + 2p_1 + p_2 \\
x + p_0 + p_1/2 + p_2/4 & \to & 2x + 2p_0 + p_1 + p_2/2 & \to & 4x + 4p_0 + 2p_1 + p_2
\end{array}$$

Dans le cas discret

Pas d'empaquetage
Pas de lemme de relèvement

Transformation du boulanger discrète : pas sensible aux conditions initiales mais sensible aux perturbations

$$\begin{array}{llll} 10 \,|\, \underline{2} & & & \\ \quad\ 5 & |\, \underline{2} & & \\ & \quad 2 & |\, \underline{2} & \\ & & \quad 1 & |\, \underline{2} \\ & & & \quad 0 \end{array}$$

Par exemple : atteindre $1 = 10\tau$

$0 \longrightarrow \tau \longrightarrow 2\tau \longrightarrow 5\tau \longrightarrow 10\tau = 1$

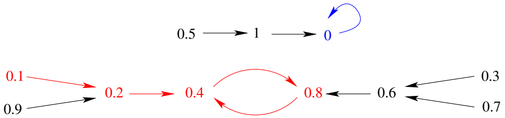
$2z + 0$ or $2z + \tau$

L'information aléatoire apportée bit par bit pendant l'évolution

et non tout d'un coup à l'origine du temps

(pas assez de place pour tout empaqueter)

Des perturbations intrinsèques selon Nicolas Gisin



Une discrimination : dans la transformation du boulanger, les pairs sont plus souvent images que les impairs

$0.1 \rightarrow 0.2$
$0.15 \rightarrow 0.3$
$0.2 \rightarrow 0.4$

Violation de l'homogénéité de l'espace (le péché originel de la physique discrète : perte de l'homogénéité et de l'isotropie)

Des perturbations intrinsèques selon Nicolas Gisin

La multiplication par 2 soit être non déterministe

En binaire $.b_1 b_2 b_3 \times 2 = b_1.b_2 b_3 0$ ou $b_1.b_2 b_3 1$

Diviser par 2 efface de l'information qu'il faut réinventer quand on multiplie par 2

La perturbation ne vient pas de l'extérieur mais de l'effet de vide créé par la multiplication par 2

La densité bornée de l'information est l'origine de l'aléa physique

Pour un système dynamique discret, le chaos est la sensibilité aux perturbations et non aux conditions initiales