

La thèse de Church–Turing et la thèse de Galilée

Gilles Dowek

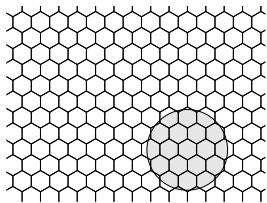
Merci à Pablo Arrighi pour quelques papiers en commun et des milliers de discussions

De Church et Turing à Gandy

- ▶ Le λ -calcul, les équations de Herbrand-Gödel, le langage des fonctions récursives, les machines de Turing permettent d'exprimer les mêmes fonctions
 - ▶ Tous les langages de programmation permettent d'exprimer les mêmes fonctions que les machines de Turing (ou moins, mais pas plus). **Langage de programmation ?**
 - ▶ Gandy : Les machines permettent de calculer les mêmes fonctions que les machines de Turing. **Machine ?**
 - ▶ Un système physique :
 - ▶ (1.) homogénéité du temps et de l'espace,
 - ▶ (2.) vitesse de propagation de l'information bornée (l'état d'une pièce de la machine n'influence l'état d'une autre pièce qu'après un temps proportionnel à leur distance)
- Plus :
- ▶ (3.) L'information a une densité bornée (un système physique de diamètre fini a un espace d'états fini)

Une démonstration très simple

- ▶ On discrétise l'espace et le temps d'une manière arbitraire



- ▶ Chaque cellule a un espace d'états fini (3.)
- ▶ L'état d'une cellule ne dépend que de l'état d'un nombre fini de cellules à l'étape précédente (2.)
- ▶ La fonction d'évolution locale est finie donc calculable (par une machine de Turing)
- ▶ Elle est la même en tout lieux et tout temps (1.)
- ▶ La fonction d'évolution globale est calculable (par une machine de Turing)

Gandy = Bekenstein

R. Gandy. Church's thesis and principles for mechanisms, 1980

J. D. Bekenstein. Universal upper bound to entropy-to-energy ratio for bounded systems, 1981

La quantité maximale d'information contenue dans un objet de rayon R est

$$I = \frac{1}{4\ln(2)} \frac{c^3}{\hbar G} 4\pi R^2$$

R^2 ?

La densité bornée de l'information n'est pas une hypothèse supplémentaire qui définit la notion de « machine », elle est contenue dans « système physique »

Un principe ancien ?

Une grandeur physique, un nombre de chiffres significatifs fini (2, 3, 17 ...)

Pourquoi ?

- ▶ (positiviste) Nous avons accès à ces grandeurs par des instruments de mesure imprécis (même si ce sont, peut-être, intrinsèquement des nombres réels)
- ▶ (pythagoricienne) Ces grandeurs sont intrinsèquement discrètes

Un nombre réel (avec une infinité de décimales) : une quantité infinie d'information

Une remarque déjà faite par M. Born (merci à N. Gisin pour la référence que j'ai malheureusement perdue : légende urbaine)

Refaire toute la physique avec $\mathbb{D}$ (attention pas de $\sqrt{2}$, π) (in)dépendant de la base ?



De quoi la constante de Planck est-elle la grandeur ?

c : « la vitesse de la lumière », non « la constante de Rømer »

$\hbar$: non « l'action de ??? », mais « la constante de Planck »

- ▶ En relativité restreinte, les durées peuvent se mesurer en mètres : multiplier la durée en secondes par c
- ▶ En relativité générale, les masses également peuvent se mesurer en mètres : multiplier la masse en kilogrammes par $\frac{\mathcal{G}}{c^2}$ (demi-rayon de Schwarzschild)

$\hbar$ en $m^2 \text{ kg s}^{-1}$ s'exprime alors en m^2

$$\hbar_{m^2} = \hbar_{m^2 \text{ kg s}^{-1}} \frac{\mathcal{G}}{c^2} \frac{1}{c} = 2.612 \cdot 10^{-70} m^2 \text{ (aire de Planck)}$$

Mais alors

$$I = \frac{1}{4 \ln(2)} \frac{1}{\hbar_{m^2}} 4\pi R^2$$

La bonne constante n'est pas $\hbar_{m^2}$ mais $4 \ln(2) \hbar_{m^2}$ et c'est l'**aire d'un bit**

La thèse de Church-Turing

Un système physique muni d'un protocole de communication : on choisit des valeurs $a_1, \dots, a_n$ et on en observe d'autres $b_1, \dots, b_p$

Exemple : une pierre tombe dans le vide, on choisit le temps, on observe la distance (ou le contraire)

Un tel système physique « calcule » une fonction calculable (par une machine de Turing)

~~Un principe de la physique~~

Un énoncé d'observation

Une conséquence des principes (1.) homogénéité du temps et de l'espace, (2.) vitesse de propagation de l'information bornée **par c** , (3.) densité de l'information bornée **par $1/h$** (une fois les changements d'unités faits)

Des objections

- ▶ **Le monde n'est pas calculable parce qu'il est non déterministe :**
algorithmes non déterministes, machines de Turing non déterministes...
- ▶ **L'intrication et son effrayante action à distance contredit (2.) :**
Arrighi et D., The physical Church-Turing thesis and the principles of quantum theory, 2012.
Arrighi, Nesme, et Werner. Unitarity plus causality implies localizability, 2010.
Arrighi, Nesme, et Werner. Quantum cellular automata over finite, unbounded configurations, 2008.
- ▶ **Le monde n'est pas calculable parce qu'il est chaotique :**
Real numbers, chaos, and the principle of a bounded density of information, 2013.
The physical Church-Turing thesis and non-deterministic computation over the real numbers, 2012.
La forme physique de la thèse de Church et la sensibilité aux conditions initiales, 2009.

La thèse de Galilée

Galilée (1623) : La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères dans lequel il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques.

Einstein (1936) : L'éternel mystère du monde est son intelligibilité

Wigner (1960) : L'efficacité déraisonnable des mathématiques dans les sciences naturelles

Quelques tentatives d'explications

- ▶ Dieu est mathématicien
- ▶ Les concepts mathématiques sont construits par abstraction de concepts empiriques
- ▶ Les scientifiques sélectionnent des phénomènes mathématisables
- ▶ Les scientifiques approximent les phénomènes pour les rendre mathématisables
- ▶ Nous faisons partie de la nature : nos concepts mathématiques sont naturels

Une thèse un peu plus restreinte

- ▶ Un système physique : on choisit des valeurs $a_1, \dots, a_n$ et on en observe d'autres $b_1, \dots, b_p$ (Ces valeurs sont liées par une relation **réalisée** par le système physique)
- ▶ Les relations physiquement réalisées sont exprimables par une proposition mathématique $F = \mathcal{G}MM'/d^2$, $y = gt^2/2$, $U = RI$, $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} \dots$

La fonction (potentiellement non déterministe) $a_1, \dots, a_n \mapsto b_1, \dots, b_p$ est calculable (par une machine de Turing) (thèse de Church-Turing) donc exprimable par une proposition mathématique

Ou bien lemme de représentation des machines de Turing dans l'arithmétique de Peano, ou bien la représentation par une machine de Turing est déjà mathématique dans un langage un peu plus vaste

Pourquoi le monde est-il mathématisable ?

(1.), (2.) (3.) $\Rightarrow$ thèse de Church-Turing
thèse de Church-Turing $\Rightarrow$ thèse de Galilée

Transitivité de l'implication

(1.), (2.) (3.) $\Rightarrow$ thèse de Galilée

Le monde est mathématisable parce que l'information a une vitesse de propagation bornée et une densité bornée

Le monde est mathématisable parce qu'il est assez « simple » pour être mathématisé