MPRI 2-7-1
Fondements des systèmes de preuves

Gilles Dowek et Sylvie Boldo

Mardi 10 Novembre 2009

Durée 2h.
Tous documents autorisés.

1

(3 pts)

(a) Soit P et Q deux symboles de proposition (c'est-à-dire deux symboles de prédicat d'arité nulle). Donner une démonstration sans coupures en déduction naturelle de la proposition $(P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q))$.

(b) Exprimer cette démonstration par un terme du λ-calcul.

(c) Quel est le λ-calcul le plus simple qui permet d'exprimer cette démonstration ?

2

(3 pts)

(a) Soit P un symbole de proposition. Donner un modèle dans lequel la proposition P n'est pas valide. La proposition P a-t-elle une démonstration constructive ?

(b) Donner un modèle dans lequel la proposition $\neg P$ n'est pas valide. La proposition $\neg P$ a-t-elle une démonstration constructive ?

(c) La proposition $P \vee \neg P$ a-t-elle une démonstration constructive ?

3

(6 pts)

(a) En Déduction modulo, on considère la théorie formée par la règle de calcul

$$P \longrightarrow (Q \Rightarrow Q)$$

Montrer que cette théorie est super-cohérente.

(b) La réduction des démonstrations termine-t-elle fortement dans cette théorie ?

(c) On considère, maintenant, la théorie

$$P \longrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Montrer que la proposition Q a une démonstration dans cette théorie.

(d) Quel est le terme du λ-calcul exprimant cette démonstration ?

(e) Ce terme termine-il fortement ?

(f) Montrer que cette théorie n'est pas super-cohérente.

4

(4 pts)
Vrai ou faux ?

(a) Toute fonction calculable et totale est exprimable dans le système T de Gödel.

(b) Toute fonction récursive primitive est exprimable dans le système T de Gödel.

(c) Toute fonction exprimable dans le système T de Gödel est récursive primitive.

(d) Il existe une fonction calculable et totale qui n'est pas exprimable dans le système T de Gödel.

5

(4 pts)

(a) Donner une démonstration, dans la théorie des types simples, de la proposition

$$\forall x \ (\varepsilon(x) \Rightarrow \varepsilon(x))$$

(b) Si on élimine le quantificateur universel de la proposition ci-dessus avec le terme $y \dot{\Rightarrow} y$, de quelle proposition obtient-on une démonstration ?

(c) Cette démonstration est-elle sans coupures ?

(d) Quelle est sa forme normale ?