# Des théories décidables: résumé

Augustin Albert

ENS Paris-Saclay

21 mars 2022

# Montrer la décidabilité d'un théorie

## La méthode du modèle fini

Théorie vide avec un symboles de prédicat unaire

## L'élimination des quantificateurs

Objectif: transformer $A \mapsto A'$ avec $A'$ sans quantificateur et $A \Leftrightarrow A'$ démontrable. Il suffit de traiter $\exists x B$ avec $B$ sans quantificateur.

### Ordres totaux denses sans extremités

$=, <$

$<$ ordre total...

### Arithmétique de Presburger

$0, \mathcal{S}, + =$

valide dans le modèle $\mathbb{N}$

### Analyse élémentaire

$+, \times, =, <$

valide dans le modèle $\mathbb{R}$

# La méthode du modèle fini

La théorie vide avec un unique symbole de prédicat unaire est décidable:
Dans un modèle $\mathcal{M}$:

- Mettre en relation les éléments indiscernables et quotienter
- $A$ démontrable ssi $A$ valide dans tous les modèles de cardinal $\leq 2$
- il suffit d'énumérer ces modèles (finis)

Généralisation à $n$ prédicats unaires, à des fonctions unaires d'une sorte vers une autre...

$$\mathcal{M}_s, P_1, ..., P_n$$

$$\downarrow f$$

$$\mathcal{M}_{s'}, P'_1, ..., P'_m$$

# L'élimination des quantificateurs

Pour montrer qu'une proposition $A$ quantifiée est démontrable,
Trouver un algorithme de réduction:

- $A \to A'$, $A'$ sans quantificateur, $A \Leftrightarrow A'$ démontrable
- par récurrence, seul $\exists x B$ et $\forall x B$ ont de l'intérêt
- un seul des cas est utile car $\forall x B \Leftrightarrow \neg \exists x \neg B$ est démontrable

## Example: racines d'un polynome de degré 2

$$\exists x(ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow$$
$$(\neg a = 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (\neg b = 0 \vee c = 0))$$

# L'élimination des quantificateurs

## Ordres totaux denses sans extremités

$=, <$ avec $=$ l'égalité et $<$ un ordre total dense sans extremités

1. forme normale disjonctive
   $C \Rightarrow D \to \neg C \vee D$
2. distribuer $\exists x$ et supprimer $x = y, y = x, x = x, x < x$
   $\exists x(x = y \wedge C) \to (y/x)C$
3. $\exists x((\bigwedge_{y \in I} y < x) \wedge (\bigwedge_{z \in J} x < z)) \to \bigwedge_{y \in I, z \in J} y < z$

# L'élimination des quantificateurs

## L'arithmétique de Presburger

Théorème: l'ensemble des propositions formées dans le language $0, \mathcal{S}, + =$ valides dans le modèle $\mathbb{N}$ est décidable.

Généralisation à l'ensemble des propositions formées dans le langage 0, 1, $+$, , , Mult2, Mult3,Mult4... valides dans $\mathbb{Z}$.

1. supprimer $\Rightarrow$ et $\neg$
   $\neg Mult_n(t) \rightarrow Mult_n(t+1) \vee ... \vee Mult_n(t+n-1)$
2. balancer $\leq$, égaliser les coefficients et changer de variable
   $\exists x(1 \leq 3x \wedge x \leq yx) \rightarrow \exists x(2 \leq x \wedge x \leq 3y \wedge Mult_6(x))$
3. observation: si $\exists x A$ valide, on dispose d'une valeur de $x$. Ou bien les valeurs plus grandes et égales modulo la "période de A" sont solutions, ou bien cette valeur est majoré par un terme de $A$.

# L'élimination des quantificateurs

## L'analyse élémentaire

Théorème (Tarski): l'ensemble des propositions formées dans le language $+, \times, =, <$ valides dans le modèle $\mathbb{R}$ est décidable.

Corollaire: Géométrie élémentaire décidable