Calcul des séquents, recherche de preuve et unification

[Logique] Résumé de cours

Vincent Lafeychine

21 février 2022

école normale supérieure paris—saclay

Introduction : La démonstration automatique

Objectif : Logiciel de démonstration automatique

Objectif : Découvrir si les logiciels de démonstration automatique sont réalisables.

Objectif : Logiciel de démonstration automatique

Objectif : Découvrir si les logiciels de démonstration automatique sont réalisables.

- Programmes capables de construire des démonstrations générales.

Objectif : Logiciel de démonstration automatique

Objectif : Découvrir si les logiciels de démonstration automatique sont réalisables.

- Programmes capables de construire des démonstrations générales.

Ce type de logiciel prend de l'intêret dans plusieurs champs d'applications.

Objectif : Logiciel de démonstration automatique

Objectif : Découvrir si les logiciels de démonstration automatique sont réalisables.

- Programmes capables de construire des démonstrations générales.

Ce type de logiciel prend de l'intêret dans plusieurs champs d'applications.

« Le test de programmes peut être une façon très efficace de montrer la présence de bugs mais est désespérément inadéquat pour prouver leur absence »

– Edsger Dijkstra.

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

- Ainsi, la démontrabilité de la logique des prédicats est semi-décidable.

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

- Ainsi, la démontrabilité de la logique des prédicats est semi-décidable.

En effet, par énumération des arbres de preuves pour démontrer P :

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

- Ainsi, la démontrabilité de la logique des prédicats est semi-décidable.

En effet, par énumération des arbres de preuves pour démontrer P :

- Si une démonstration de P existe : L'arbre de preuve sera obtenu à un moment.

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

- Ainsi, la démontrabilité de la logique des prédicats est semi-décidable.

En effet, par énumération des arbres de preuves pour démontrer P :

- Si une démonstration de P existe : L'arbre de preuve sera obtenu à un moment.
- Sinon : L'algorithme bouclera indéfiniment.

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

- Ainsi, la démontrabilité de la logique des prédicats est semi-décidable.

En effet, par énumération des arbres de preuves pour démontrer P :

- Si une démonstration de P existe : L'arbre de preuve sera obtenu à un moment.
- Sinon : L'algorithme bouclera indéfiniment.

L'énumération exhaustive comporte trop d'arbres de preuves à tester.

Contrainte : Théorème d'indécidabilité de Church

D'après le Théorème de Church : La logique des prédicats est indécidable.

- Ainsi, la démontrabilité de la logique des prédicats est semi-décidable.

En effet, par énumération des arbres de preuves pour démontrer P :

- Si une démonstration de P existe : L'arbre de preuve sera obtenu à un moment.
- Sinon : L'algorithme bouclera indéfiniment.

L'énumération exhaustive comporte trop d'arbres de preuves à tester.

- Cependant, l'énumération moins naïve a un intérêt pratique.

La recherche de démonstrations en déduction naturelle

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$

$$\frac{}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \land Q)$

$$\frac{}{P \vdash Q \Rightarrow (P \land Q)} \Rightarrow_{\text{intro}}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d’introduction

Énumérons les règles s’appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d’introduction de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P \wedge Q}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)} \Rightarrow_{\text{intro}}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge_{\text{intro}}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow_{\text{intro}}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash P}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge_{\text{intro}}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow_{\text{intro}}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

<ins>Exemple :</ins> Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,\text{ax.} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash P}\,\text{ax.}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge_{\text{intro}}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\,\Rightarrow_{\text{intro}}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'introduction

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'introduction de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \vdash Q \Rightarrow (P \land Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q}\text{ax.} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash P}\text{ax.}}{P, Q \vdash P \land Q}\land_{\text{intro}}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \land Q)}\Rightarrow_{\text{intro}}$$

La forme de la conclusion permet de guider le choix des introductions.

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P}\ \text{élim}$$

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P}\ \text{élim}$$

À chaque nœud, il faut deviner (et donc énumérer) :

- La règle à utiliser.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{\text{élim}}$$

À chaque nœud, il faut deviner (et donc énumérer) :

- La règle à utiliser.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{\text{élim}}$$

À chaque nœud, il faut deviner (et donc énumérer) :

- La règle à utiliser.
- Une ou plusieurs propositions dans le cas des règles d'élimination.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{\text{élim}}$$

À chaque nœud, il faut deviner (et donc énumérer) :

- La règle à utiliser.
- Une ou plusieurs propositions dans le cas des règles d'élimination.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\ \text{ax.}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{\text{élim}}$$

À chaque nœud, il faut deviner (et donc énumérer) :

- La règle à utiliser.
- Une ou plusieurs propositions dans le cas des règles d'élimination.

Étude de cas : Limitation aux règles d'élimination

Énumérons les règles s'appliquant à chaque nœud, de bas en haut.

- Limitons-nous aux règles d'élimination de la déduction naturelle.

<u>Exemple :</u> Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\ \text{ax.}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{\text{élim}}$$

À chaque nœud, il faut deviner (et donc énumérer) :

- La règle à utiliser.
- Une ou plusieurs propositions dans le cas des règles d'élimination.

La forme des hypothèses ne permet pas de guider le choix des éliminations.

Système de déduction : Le calcul des séquents

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)
- Règles gauches : Règles d'introduction sur les hypothèses (*Élimination*)

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)
- Règles gauches : Règles d'introduction sur les hypothèses (*Élimination*)

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)
- Règles gauches : Règles d'introduction sur les hypothèses (*Élimination*)

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P}$$

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)
- Règles gauches : Règles d'introduction sur les hypothèses (*Élimination*)

Exemple : Prouvons $P \land Q \vdash P$

$$\frac{}{P \land Q \vdash P} \land_{\text{gauche}}$$

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)
- Règles gauches : Règles d'introduction sur les hypothèses (*Élimination*)

Exemple : Prouvons $P \land Q \vdash P$

$$\cfrac{\cfrac{}{P, Q \vdash P}}{P \land Q \vdash P} \land_{\text{gauche}}$$

Définition : Le calcul des séquents

Le calcul des séquents introduit d'autres règles de déductions.

- Ce système de déduction réduit la dissymétrie de la déduction naturelle.

Le calcul des séquents introduit deux types de règles :

- Règles droites : Règles d'introduction sur la conclusion (*Introduction*)
- Règles gauches : Règles d'introduction sur les hypothèses (*Élimination*)

Exemple : Prouvons $P \wedge Q \vdash P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{ax.}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{\text{gauche}}$$

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

En calcul des séquents, il y a disparition de l'hypothèse :

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

En calcul des séquents, il y a disparition de l'hypothèse :

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

En calcul des séquents, il y a disparition de l’hypothèse :

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ P(x) \vdash C}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Une nouvelle règle permet de sauvegarder l’hypothèse :

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

En calcul des séquents, il y a disparition de l'hypothèse :

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ P(x) \vdash C}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Une nouvelle règle permet de sauvegarder ĺ'hypothèse :

- Cette règle est appellée règle de contraction :

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

En calcul des séquents, il y a disparition de l’hypothèse :

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ P(x) \vdash C}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Une nouvelle règle permet de sauvegarder ĺ’hypothèse :

- Cette règle est appellée règle de contraction :

Définition : La règle de contraction

En déduction naturelle, il y a une permanence des hypothèses.

- Les hypothèses peuvent donc être utilisées plusieurs fois.

En calcul des séquents, il y a disparition de l'hypothèse :

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ P(x) \vdash C}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Une nouvelle règle permet de sauvegarder ĺ'hypothèse :

- Cette règle est appellée règle de contraction :

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\frac{}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\dfrac{}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q} \neg_{\text{gauche}}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg_{\text{gauche}}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\ \neg_{\text{droite}}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg_{\text{gauche}}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\,\neg\text{droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\,\neg\text{gauche}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\Rightarrow_{\text{gauche}}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\neg_{\text{droite}}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\neg_{\text{gauche}}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q} \qquad \dfrac{}{P \vdash P, Q}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q} \Rightarrow_{\text{gauche}}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q} \neg_{\text{droite}}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q} \neg_{\text{gauche}}
$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q}\text{ax.} \qquad \dfrac{}{P \vdash P, Q}\text{ax.}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\Rightarrow_{\text{gauche}}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\neg_{\text{droite}}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\neg_{\text{gauche}}$$

Proposition : Utilisation du tiers-exclu

Le tiers-exclu fait *voyager* les propositions entre conclusions et hypothèses.

Une alternative est d'avoir plusieurs propositions en conclusion.

- On dénote Δ l'ensemble des conclusions d'un séquent.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{ax.} \qquad \dfrac{}{P \vdash P, Q}\ \text{ax.}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\ \Rightarrow_{\text{gauche}}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\ \neg_{\text{droite}}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg_{\text{gauche}}
$$

Similairement aux hypothèses, il existe une règle de contraction à droite.

La recherche de démonstrations en calcul des séquents

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \pi_1 \\ \Gamma' \vdash \Delta' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, \pi_2 \\ \Gamma'' \vdash \Delta'' \end{array}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\Gamma' \vdash \Delta'} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_2}{\Gamma'' \vdash \Delta''}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash P(x)}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash P(x)}\ \forall_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P(x) \wedge Q(x) \vdash P(x)}}{\forall x \ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash P(x)}\ \forall_{\text{gauche}}}{\forall x \ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \land Q(x) \vdash P(x)}\ \land_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash P(x)}\ \forall_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x), Q(x) \vdash P(x)}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash P(x)}\ \wedge_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash P(x)}\ \forall_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x), Q(x) \vdash P(x)}\ \text{ax.}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash P(x)}\ \wedge_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash P(x)}\ \forall_{\text{gauche}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\frac{}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{}{P(x) \wedge Q(x) \vdash \forall x\ (P(x))}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition

$$\dfrac{\dfrac{}{P(x) \wedge Q(x) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{droite}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)

$$\dfrac{\dfrac{}{P(x) \wedge Q(x) \vdash \forall x\ (P(x))}\ {\color{red}\forall_{\text{droite}}}}{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\frac{}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \land \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\overline{\forall x\ (P(x) \land \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \land \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \land \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(0) \wedge \neg P(S(0)), P(S(0)) \wedge \neg P(S(S(0))) \vdash}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(0) \wedge \neg P(S(0)), P(S(0)) \wedge \neg P(S(S(0))) \vdash}\ \wedge_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(0), \neg P(S(0)), P(S(0)), \neg P(S(S(0))) \vdash}}{P(0) \wedge \neg P(S(0)), P(S(0)) \wedge \neg P(S(S(0))) \vdash} \wedge_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash} \forall_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash} \text{contr.}_{\text{gauche}}
$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(0), \neg P(S(0)), P(S(0)), \neg P(S(S(0))) \vdash}\ \neg_{\text{gauche}}}{P(0) \wedge \neg P(S(0)), P(S(0)) \wedge \neg P(S(S(0))) \vdash}\ \wedge_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(0), P(S(0)), \neg P(S(S(0))) \vdash P(S(0))}}{P(0), \neg P(S(0)), P(S(0)), \neg P(S(S(0))) \vdash}\ \neg_{\text{gauche}}}{P(0) \wedge \neg P(S(0)), P(S(0)) \wedge \neg P(S(S(0))) \vdash}\ \wedge_{\text{gauche}}\ \text{2x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}\ \text{2x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \text{contr.}_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(0), P(S(0)), \neg P(S(S(0))) \vdash P(S(0))}\text{ax.}}{P(0), \neg P(S(0)), P(S(0)), \neg P(S(S(0))) \vdash}\neg_{\text{gauche}}}{P(0) \wedge \neg P(S(0)), P(S(0)) \wedge \neg P(S(S(0))) \vdash}\wedge_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))), \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\forall_{\text{gauche}}\ 2\text{x}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\text{contr.}_{\text{gauche}}
$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{}{\forall x\ (P(x) \land \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle

$$\dfrac{\dfrac{}{P(t) \wedge \neg P(S(t))) \vdash}\ ?}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)

$$\dfrac{\dfrac{}{P(t) \wedge \neg P(S(t))) \vdash}\ {\color{red}?}}{\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash}\ \forall_{\text{gauche}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\frac{}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\frac{}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(f(c)))}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\, P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(f(c)))}\text{ ax.}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\frac{}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(c))}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(c))}\ {\color{red}?}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Choix restants à effectuer

En calcul des séquents, il reste un nombre de choix à prendre à chaque nœud :

- Le choix du séquent (Choix indifférent)
- Le choix de la proposition (Choix arborescent fini)
- Le choix de la règle (Choix arborescent fini)
- Le choix du terme (Choix arborescent infini)

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(c))}\ ?}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{ax.}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.
- On obtient un schéma de démonstration.

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{ax.}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.
- On obtient un schéma de démonstration.

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\text{ax.}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\exists_{\text{droite}}$$

Il ne reste qu'à chercher une substitution des méta-variables.

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.
- On obtient un schéma de démonstration.

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{ax.}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Il ne reste qu'à chercher une substitution des méta-variables.

- Cette substitution parfait le schéma de démonstration.

Calcul des séquents : Éviter l'énumération lors du choix du terme

Le choix du terme est nécessaire pour les règles $\exists_{\text{droite}}$ et $\forall_{\text{gauche}}$.

- Utilisons une méta-variable lorsqu'on utilise ces règles.
- On obtient un schéma de démonstration.

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{ax.}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists_{\text{droite}}$$

Il ne reste qu'à chercher une substitution des méta-variables.

- Cette substitution parfait le schéma de démonstration.
- En appliquant l'algorithme d'unification.

Avez-vous des questions ?