Complétude du système R

Lucas Tabary-Maujean

ENS Paris-Saclay – DER Informatique – Logique L3

11 avril 2022

Rappels

On a déjà abordé la correction de la méthode de *Résolution*

Déduction d'une preuve de $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ à partir d'une contradiction obtenue avec :

Système R

$$\frac{P \vee C \qquad \neg Q \vee C'}{\sigma(C \vee C')}\,\texttt{Rés.} \qquad \sigma = \mathrm{mgu}(P, Q)$$

$$\frac{L \vee L' \vee C}{\sigma(L \vee C)}\,\texttt{Fac.} \qquad \sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$$

Complétude

Théorème

Si $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est valide dans tous les modèles, alors $\perp$ est dérivable dans R à partir de $C_1, \ldots, C_n$.
Alternativement : Si $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable en calcul des séquents, alors $\perp$ est dérivable dans R à partir de $C_1, \ldots, C_n$.

On montre en fait ce résultat dans un autre système, équivalent, R_0.

R_0

Système R_0

$$\frac{C}{(t/x)C}\ \texttt{Sub.}$$

$$\frac{P \vee C \qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}\ \texttt{Rés. id.}$$

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}\ \texttt{Fac. id.}$$

Si $\perp$ est dérivable à partir de $\mathcal{C}$ dans R_0, alors $\perp$ est dérivable à partir de $\mathcal{C}$ dans R : il suffit donc de montrer le résultat de complétude voulu dans ce cadre.

preuve : par récurrence sur la dérivation dans R_0. C'est ici qu'on utilise le fait que σ est solution principale dans la définition de R.

Lemme clé (dans R_0)

Si D est dérivable à partir de $\mathcal{C}, C_1$, alors D ou $D \vee C_2$ est dérivable à partir de $\mathcal{C}, C_1 \vee C_2$.

preuve : récurrence sur la dérivation de D, on utilise ici la `Factorisation identique`.

Si $\perp$ est dérivable à partir de $\mathcal{C}, C_1$ et dérivable à partir de $\mathcal{C}, C_2$, alors $\perp$ est dérivable a partir de $\mathcal{C}, C_1 \vee C_2$.

Approche syntaxique

Par récurrence sur un arbre de preuve clos et sans coupure de preuve de $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash P_1, \ldots, P_m$, où $P_1, \ldots, P_m$ sont des propositions atomiques, on montre que $\perp$ est dérivable à partir de $C_1, \ldots, C_n, \neg P_1, \ldots, \neg P_m$.

$\rightarrow$ limite les règles utilisables à :

Contraction-gauche, -droite, $\neg$-gauche, axiome, $\forall$-gauche, $\vee$-gauche

- axiome : application de `Résolution identique` ;
- $\forall$-gauche : on remplace $\overline{\forall} C_i$ par $\overline{\forall}(t/x)C_i$, utilise hypothèse de récurrence puis `Substitution` ;
- $\vee$-gauche : utilisation du lemme clé.

Approche sémantique

On reformule encore une fois le théorème :

Si $\perp$ est non dérivable à partir de $C_1, \ldots, C_n$, alors $\mathcal{C} = \overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n$ a un modèle.

On cherche donc à en construire un modèle comme dans la preuve du théorème de complétude de Gödel.

$\rightarrow$ avec la contraposé du lemme clé, on ajoute successivement les propositions atomiques à l'ensemble des clauses. On construit donc un ensemble de clauses closes (infini) $\mathcal{U}$ duquel $\perp$ n'est pas dérivable dans R_0.

On en déduit un modèle $\mathcal{M}$, on vérifie que c'est un modèle de $\mathcal{C}$

$\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{C}$

Soit $C = L_1 \vee \cdots \vee C_n$ une clause de $\mathcal{C}$, ρ une subsitution close. On peut dériver $\perp$ de $\rho C, \neg\rho L_1, \ldots, \neg\rho L_n$, donc pas tous dans $\mathcal{U}$.

donc $[\![\neg L_1]\!]_\rho = 0$ dans $\mathcal{U}$, donc $[\![C]\!]_\rho = 1$.

Théorème de Herbrand

Le théorème de Herbrand fournit une démonstration alternative du théorème de complétude, en limitant la démonstration au cas propositionnel (sans quantificateur)

Couper des arbres

On reformule la complétude par : si $\mathcal{C}$ (vu comme théorie) n'a pas de modèle, alors $\perp$ est dérivable dans R_0.

On élague un arbre infini petit à petit pour aboutir, en s'assurant de la terminaison, à une dérivation de $\perp$.