Logique

Résumé des épisodes précédents

La logique des prédicats : démonstration, théorie, modèle

Indécidabilité et incomplétude

La démonstration automatique

L'utilisation positive de résultats négatifs

Le théorème de Church : logique des prédicats indécidable

Mais

1. demande un prédicat binaire : si que des prédicats unaires décidable
2. peut devenir décidable si on ajouter des axiomes : identifier des théories décidables : Presburger, Skolem, Tarski...
3. semi-décidable : méthodes de démonstration automatique

La semi-décidabilité

On énumère tous les arbres
Si une démonstration de A existe, elle finira par se présenter
Sinon on ne termine pas

Une méthode très générale pour résoudre un problème : énumérer et tester
Comment écrire un bon roman
a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t u, v, w, x, y, z, aa, ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, ak, al, am...

À un certain moment *La Disparition* apparaîtra
Si vous pouvez reconaître un bon roman, vous pouvez en écrire un (mais cela prend du temps)

L'énumération et le test

Énumérer tous les arbres
Utilité théorique (semi-décidabilité, théorème de Gödel)
Mais sans intérêt pratique

Toutefois : l'idée d'énumération et de test a un intérêt pratique

À quoi sert la démonstration automatique ?

- Démontrer des théorèmes mathématiques ?
- Systèmes experts, bases de données déductives...
- Correction des programmes

I. La recherche de démonstrations en déduction naturelle

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud
De bas en haut

$$\frac{}{P \vdash Q \Rightarrow (P \land Q)} \; ?$$

Commençons par essayer une règle d'introduction
Combien de possibilités ?

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud
De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ {\color{red}?}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

Encore une règle d'introduction
Combien de possibilités ?

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud
De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ ? \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-intro}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

Encore une règle d'introduction ?

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud
De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ {\color{red}?}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-intro}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud
De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{axiome}}{\dfrac{P, Q \vdash P \wedge Q}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}}\ \wedge\text{-intro}$$

Les règles d'élimination

Une situation moins agréable

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{-élim}$$

peut toujours s'appliquer

Il faut deviner B qui n'apparaît pas en bas (c'est-à-dire énumérer tous les B possibles)

Les règles d'élimination

$$\frac{}{P \land Q \vdash P}\ ?\text{-élim}$$

Les règles d'élimination

$$\dfrac{\overline{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\ \text{axiome}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge\text{-élim}$$

Comment a-t-on deviné $\wedge$ et Q ?

Une dissymétrie

En déduction naturelle

La forme de la conclusion du séquent permet de guider le choix des introductions

La forme des hypothèses du séquent ne permet pas de guider le choix des éliminations

II. Le calcul des séquents (sans la règle de coupure)

L'idée

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites
Élimations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauches

Par exemple

$$\frac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge\text{-gauche}$$

Que faire de cette hypothèse ?

L'idée

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites
Éliminations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauches

Par exemple

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge\text{-gauche}$$

Revenons à notre exemple

$$\frac{}{P \land Q \vdash P} \; ?$$

Revenons à notre exemple

$$\dfrac{P, Q \vdash P}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge\text{-gauche}$$

Les autres règles

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash C} \; \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \; \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} \; \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C} \; \neg\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, (t/x)A \vdash C}{\Gamma, \forall x \; A \vdash C} \; \forall\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, \exists x \; A \vdash C} \; \exists\text{-gauche} \; x \notin FV(\Gamma, C)$$

La règle de contraction

Déduction naturelle : permanence des hypothèses : utilisations multiples
En calcul des séquents

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ P(x) \vdash C}\ \forall\text{-gauche}$$

disparition de l'hypothèse $\forall x\ A$

Sauvegarder l'hypothèse

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\ \text{contraction-gauche}$$

multi-ensembles

III. Le tiers exclu en calcul des séquents

Comme en déduction naturelle

Trois solutions :

Règle spéciale

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

Règle spéciale

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Ou...

Un exemple

$$\dfrac{\dfrac{?}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg\text{-gauche}$$

Une meilleure idée

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P, \neg Q \vdash \bot}\ \neg\text{-gauche}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \neg\neg Q}\ \neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \text{tiers exclu}
$$

Une meilleure idée

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\;\text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\;\text{axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\;\Rightarrow\text{-gauche}}{P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \bot}\;\neg\text{-gauche}}{P, \neg Q \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}\;\neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P, \neg Q \vdash \bot}\;\neg\text{-gauche}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \neg\neg Q}\;\neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\;\text{tiers exclu}$$

Sauvegarder Q à gauche

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{axiome}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{axiome}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\Rightarrow$-gauche}
\BinaryInfC{$P, P \Rightarrow Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\neg$-gauche}
\UnaryInfC{$P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg$-droite}
\UnaryInfC{$P, \neg Q \vdash \neg(P \Rightarrow Q)$}
\RightLabel{$\neg$-gauche}
\UnaryInfC{$\neg\neg(P \Rightarrow Q), P, \neg Q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg$-droite}
\UnaryInfC{$\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \neg\neg Q$}
\RightLabel{tiers exclu}
\UnaryInfC{$\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q$}
\end{prooftree}
$$

Ou alors le laisser à droite

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\ \Rightarrow\text{-gauche}}{P, P \Rightarrow Q \vdash (\bot,) Q}\ (\neg\text{-gauche})}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\ \neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash (\bot,) Q}\ \neg\text{-gauche}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ (\neg\text{-droite})}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ (\text{tiers exclu})
$$

Des séquents avec plusieurs propositions à droite

Des séquents avec plusieurs propositions à droite

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P, Q}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\ \Rightarrow\text{-gauche}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\ \neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg\text{-gauche}
$$

Le tiers exclu

Comme à gauche, une règle de contraction à droite

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \text{contraction-droite}$$

Une démonstration du tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{axiome}}{\Gamma \vdash A, \neg A}\ \neg\text{-droite}}{\Gamma \vdash A, A \vee \neg A}\ \vee\text{-droite}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\ \vee\text{-droite}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ \text{contraction-droite}$$

IV. La recherche de démonstrations en calcul des séquents sans coupures

Quels choix ?

Plus besoin d'énumérer toutes les propositions possibles

Mais... il reste quelques choix à faire

1. Le choix du séquent

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,{\color{red}?} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,{\color{red}?}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-droite}$$

2. Le choix de la proposition

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

3. Le choix de la règle : logique, contraction (ou axiome)
4. Le choix du terme

$$\dfrac{\Gamma, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

Les labyrinthes et les œufs mimosa

Choix arborescent
Ou bien A ou ou bien B : on choisit A, si A échoue on choisit B (cas général)

Choix indiffèrent
Ou bien A ou bien B : peu importe que l'on choisisse A ou B, le résultat sera le même (séquentialisation de tâches indépendantes)

1. Le choix du séquent

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,? \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,?}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-droite}$$

2. Le choix de la proposition

$$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x))$$

3. Le choix de la règle : logique, contraction (ou axiome)

$$\forall x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x))) \vdash$$

4. Le choix du terme

$$P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))$$

Choix arborescents finis et infinis

Choix de la proposition : fini

Choix de la règle : fini

Choix du terme : infini

Éviter le choix du terme

$$\dfrac{?}{P(f(f(c))) \vdash \exists x \; P(f(x))} \; \exists\text{-droite}$$

essayer c, $f(c)$, $f(f(c))$...
Quel terme choisir ? Comment l'a-t-on deviné ?

Essayons plutôt de retarder le choix de ce terme

$$\frac{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists\text{-droite}$$

Essayons plutôt de retarder le choix de ce terme

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{axiome}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists\text{-droite}$$

Schéma de démonstration :

- $\exists$-droite et $\forall$-gauche limitées à une (méta)-variable
- la règle *axiome* permet de démontrer n'importe quel séquent

Dans un second temps

$$\dfrac{\overline{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{axiome}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists\text{-droite}$$

Chercher une substitution de X qui parfait ce schéma de démonstration (c'est-à-dire qui le transforme en démonstration)

En comparant $P(f(f(c)))$ et $P(f(X))$

Parfaire un schéma de démonstration

Dans chaque séquent démontré par la (pseudo) règle *axiome*

On choisit une proposition atomique à gauche et à droite

Et on cherche une substitution qui rend tous ces couples identiques : l'algorithme d'unification

(puis on vérifie les conditions x n'apparaît pas dans $\Gamma\Delta$)

L'algorithme d'unification : un exemple

Les solutions du problème

$$P(f(X)) = P(f(f(c)))$$

sont les mêmes que celles du problème

$$f(X) = f(f(c))$$

qui sont les mêmes que celles du problème

$$X = f(c)$$

et ce problème a une solution qui est la substitution $f(c)/X$

L'algorithme d'unification : cas général

On choisit une équation dans le système

- $f(t_1, ..., t_n) = f(u_1, ..., u_n)$: on remplace cette équation par $t_1 = u_1, ..., t_n = u_n$
- $f(t_1, ..., t_n) = g(u_1, ..., u_m)$: on échoue
- $X = X$: on supprime cette équation
- $X = t$ (ou $t = X$), X apparaît dans t, t distinct de X : on échoue
- $X = t$ (ou $t = X$), X n'apparaît pas dans t : on substitue X par t dans le reste du système, on résout ($\longrightarrow$ substitution σ), on retourne $\sigma \cup \{\sigma t/X\}$

L'algorithme d'unification

J'ai l'impression d'avoir déjà vu cet algorithme quelque part

Un exemple

```
assume Pere(PepinLeBref,Charlemagne).
assume Pere(CharlesMartel,PepinLeBref).
assume all x all y all z ((Pere(x,y) and Pere(y,z)) implies
GrandPere(x,z)).
```

```
search GrandPere(X,Charlemagne).
```

Un exemple

```
assume Pere(PepinLeBref,Charlemagne).
assume Pere(CharlesMartel,PepinLeBref).
assume all x all y all z ((Pere(x,y) and Pere(y,z)) implies
GrandPere(x,z)).
```

```
search GrandPere(X,Charlemagne).
X = CharlesMartel
```

Un autre exemple

```
assume ((Tue(Moutarde,Moutarde) or Tue(Olive,Moutarde)) or
Tue(Rose,Moutarde)).
assume all a all b (Tue(a,b) implies Hait(a,b)).
assume all c all d (Tue(c,d) implies not PlusRiche(c,d)).
assume Hait(Moutarde,Moutarde).
assume Hait(Moutarde,Rose).
assume Hait(Olive,Moutarde).
assume Hait(Olive,Rose).
assume not Hait(Rose,Moutarde).
assume not ((Hait(Olive,Moutarde) and Hait(Olive,Olive)) and
Hait(Olive,Rose)).
assume all e (not PlusRiche(e,Moutarde) implies Hait(Olive,e)).

search Tue(X,Moutarde).
```

Un autre exemple

```
assume ((Tue(Moutarde,Moutarde) or Tue(Olive,Moutarde)) or
Tue(Rose,Moutarde)).
assume all a all b (Tue(a,b) implies Hait(a,b)).
assume all c all d (Tue(c,d) implies not PlusRiche(c,d)).
assume Hait(Moutarde,Moutarde).
assume Hait(Moutarde,Rose).
assume Hait(Olive,Moutarde).
assume Hait(Olive,Rose).
assume not Hait(Rose,Moutarde).
assume not ((Hait(Olive,Moutarde) and Hait(Olive,Olive)) and
Hait(Olive,Rose)).
assume all e (not PlusRiche(e,Moutarde) implies Hait(Olive,e)).

search Tue(X,Moutarde).
X = Moutarde
```

La prochaine fois

L'équivalence avec la déduction naturelle
L'élimination des coupures