Logique

Résumé des épisodes précédents

La notion de modèle : un outil pour étudier la démontrabilité (non-démontrabilité, complétude de la Résolution...)

Mais aussi théorèmes d'algèbre : tout ensemble infini peut être muni d'une structure de groupe

La Définissabilité

Que peut-on exprimer

- à propos d'une structure algébrique
- avec un langage ?

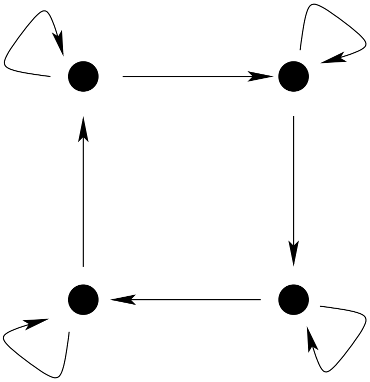
Un exemple

$\mathcal{G} = \langle \mathcal{G}, r \rangle$ (r : relation binaire sur $\mathcal{G}$)
Langage associé : R : symbole de prédicat binaire

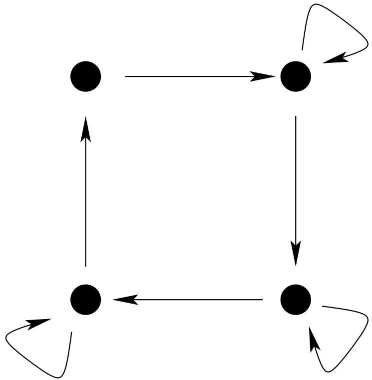
De tout a on peut aller en tout b en trois pas

$$\forall a \forall b \exists x \exists y \; (R(a,x) \wedge R(x,y) \wedge R(y,b))$$

Un exemple de structure qui vérifie la propriété



Et un exemple de structure qui ne la vérifie pas



Et la connexité ?

De tout a on peut aller en tout b par un chemin de longueur quelconque A ?

Non

I. La notion d'équivalence élémentaire

Deux structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes si
les propositions closes valides dans l'une et dans l'autre sont les mêmes

Une propriété qui dépend du langage dans lequel les propositions closes sont exprimées
(par exemple, si langage réduit à $\top$, toutes les structures élémentairement équivalentes)

Deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes

Si ϕ isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ alors

$[\![t]\!]^{\mathcal{N}}_{\phi\circ\rho} = \phi[\![t]\!]^{\mathcal{M}}_{\rho}$

$[\![A]\!]^{\mathcal{N}}_{\phi\circ\rho} = [\![A]\!]^{\mathcal{M}}_{\rho}$

En particulier si A close $[\![A]\!]^{\mathcal{N}} = [\![A]\!]^{\mathcal{M}}$

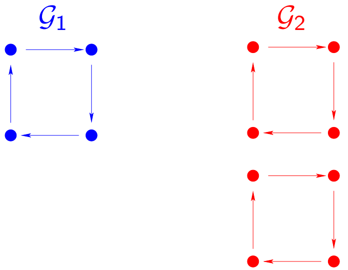
Mais plus faible

Théorie $\mathcal{T}$ complète qui a un modèle dénombrable $\mathcal{M}$
(propositions closes dans le langage de l'arithmétique de Presburger valides dans $\mathbb{N}$)

(Löwenheim-Skolem) $\mathcal{T}$ a aussi un modèle non dénombrable $\mathcal{N}$
$\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ élémentairement équivalents
mais pas isomorphes (même pas en bijection)

Quel rapport avec la non-définissabilité de la connexité ?

Dans un monde parfait, on démontrerait que



sont élémentairement équivalentes
Et donc qu'il n'y a pas de proposition A telle que $[\![A]\!]^{\mathcal{G}_1} = 1$ et $[\![A]\!]^{\mathcal{G}_2} = 0$
Bien tenté, mais $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ne sont pas élémentairement équivalente : « De tout a on peut aller en tout b en au plus quatre pas »

II. La notion d'isomorphisme partiel

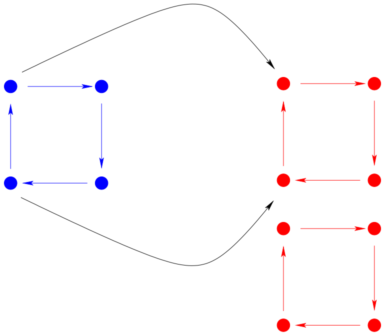
Pour simplifier : langage formé d'un seul symbole R (prédicat binaire)

$\{\langle a_1, b_1\rangle, ..., \langle a_n, b_n\rangle\}$ isomorphisme partiel de $\langle \mathcal{M}, r\rangle$ vers $\langle \mathcal{N}, s\rangle$ si

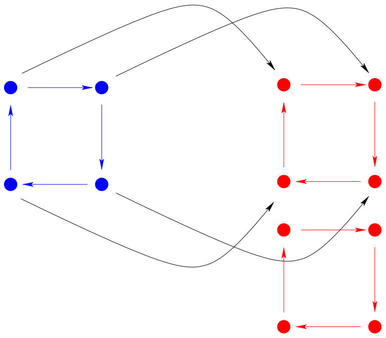
- a_i dans $\mathcal{M}$, b_i dans $\mathcal{N}$
- $a_1, ..., a_n$ distincts (fonction)
- $b_1, ..., b_n$ distincts (injective)
- $r(a_i, a_j)$ si et seulement si $s(b_i, b_j)$

n cardinal de l'isomorphisme partiel

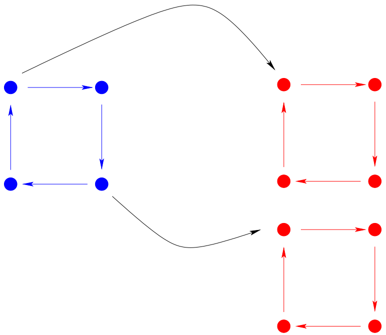
Un exemple



Un autre exemple



Un autre exemple



L'existence (la possibilité de construire) un isomorphisme partiel n'implique pas l'équivalence élémentaire

Mais la possibilité de construire un isomorphisme partiel dans un environnement hostile si

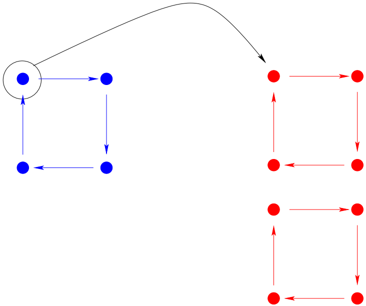
III. Construire un isomorphisme partiel dans un environnement hostile : les jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé

Deux structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Et un entier n

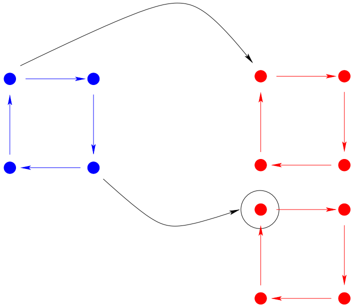
Deux joueurs : le Duplicateur et le Destructeur
Le Duplicateur cherche à construire un isomorphisme partiel de cardinal n entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Le Destructeur cherche à l'en empêcher

Le jeu se joue en n coups
À chaque coup un ensemble $\{\langle a_1, b_1\rangle, ..., \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$ a déjà été construit. Le Destructeur joue en premier et il propose ou bien un a_k dans $\mathcal{M}$ ou bien un b_k dans $\mathcal{N}$. Le Duplicateur choisit l'autre valeur

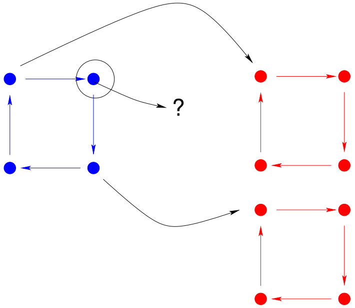
Un exemple : en trois coups, le Destructeur a une stratégie gagnante



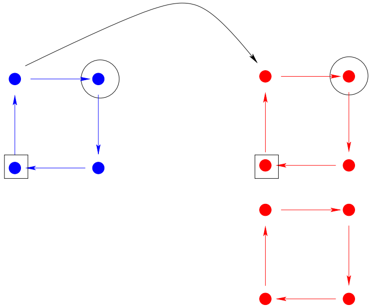
Un exemple : en trois coups, le Destructeur a une stratégie gagnante



Un exemple : en trois coups, le Destructeur a une stratégie gagnante



En revanche, en deux coups, le Duplicateur a une stratégie gagnante



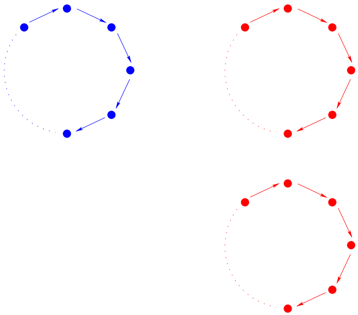
- Stratégie pour le Destructeur : fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$ dans $\mathcal{M} \uplus \mathcal{N}$
- Stratégie pour le Duplicateur : fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \times (\mathcal{M} \uplus \mathcal{N})$ dans $\mathcal{M} \uplus \mathcal{N}$
- Deux stratégies définissent une partie et un gagnant
- Une stratégie est gagnante si elle gagne contre toutes les stratégies de l'adversaire

L'originalité : le Destructeur choisit, à chaque coup, un élément de $\mathcal{M}$ ou de $\mathcal{N}$ (comme si, aux échecs, à chaque coup, le premier joueur choisissait les blancs ou les noirs)

Idée antérieure (va-et-vient) : dans une bijection, il n'y a pas vraiment d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée

Plus généralement

Les roues $\mathcal{G}_1^n$ et $\mathcal{G}_2^n$

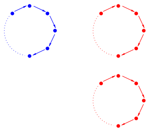


2^n sommets sur chaque roue

n coups (pas très ambitieux, mais suffisant)

Le Duplicateur a une stratégie gagnante

Plus généralement



Le Duplicateur a une stratégie gagnante

Il maintient l'invariant : après le coup k,
pour tout i, j, si $d(a_i, a_j) \leq 2^{n-k}$ ou $d(b_i, b_j) \leq 2^{n-k}$ alors $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$
où $d(x, y)$ longueur du plus court chemin de x à y

Au début : propriété triviale (ensemble vide)

À la fin : si $d(a_i, a_j) \leq 1$ ou $d(b_i, b_j) \leq 1$ alors $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$
Donc si $d(a_i, a_j) = 1$ alors $d(b_i, b_j) = 1$ et si $d(b_i, b_j) = 1$ alors $d(a_i, a_j) = 1$

IV. Le théorème

Deux structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Si pour tout n, le Duplicateur a une stratégie gagnante pour les jeux en n coups, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes

Plus généralement (et de manière plus intéressante)

Pour tout n, si le Duplicateur a une stratégie gagnante pour les jeux en n coups, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ valident les mêmes propositions closes de rang $\leq n$

- $rang(P) = rang(\top) = rang(\bot) = 0$
- $rang(\neg A) = rang(A)$
- $rang(A \wedge B) = rang(A \vee B) = rang(A \Rightarrow B) = max(rang(A), rang(B))$
- $rang(\forall x\ A) = rang(\exists x\ A) = 1 + rang(A)$

Deux structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ et un entier n

Si le Duplicateur a une stratégie gagnante pour les jeux en n coups, alors pour toute proposition A, telle que $VL(A) \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$ et $rang(A) \leq n - k$ et pour tout isomorphisme partiel $\{\langle a_1, b_1\rangle, ..., \langle a_k, b_k\rangle\}$ qui correspond à un début de partie jouée avec la stratégie du Duplicateur

$$[\![A]\!]^{\mathcal{M}}_{x_1=a_1,...,x_k=a_k} = 1 \text{ si et seulement si } [\![A]\!]^{\mathcal{N}}_{x_1=b_1,...,x_k=b_k} = 1$$

Récurrence sur A

Le cas du quantificateur universel $A = \forall x_{k+1}\ B$

On suppose $[\![\forall x_{k+1}\ B]\!]^{\mathcal{M}}_{x_1=a_1,\ldots,x_k=a_k} = 1$ et on veut

$$[\![\forall x_{k+1}\ B]\!]^{\mathcal{N}}_{x_1=b_1,\ldots,x_k=b_k} = 1$$

C'est-à-dire pour tout b_{k+1}, $[\![B]\!]^{\mathcal{N}}_{x_1=b_1,\ldots,x_k=b_k,x_{k+1}=b_{k+1}} = 1$

Supposons que le Destructeur joue b_{k+1}, le Duplicateur réplique a_{k+1}

Comme $[\![\forall x_{k+1}\ B]\!]^{\mathcal{M}}_{x_1=a_1,\ldots,x_k=a_k} = 1$, on a $[\![B]\!]^{\mathcal{M}}_{x_1=a_1,\ldots,x_k=a_k,x_{k+1}=a_{k+1}} = 1$
Et comme la stratégie est gagnante $\{\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle, \langle a_{k+1}, b_{k+1}\rangle\}$ isomorphisme partiel donc (hypothèse de récurrence)

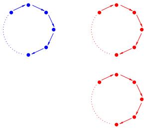
$$[\![B]\!]^{\mathcal{N}}_{x_1=b_1,\ldots,x_k=b_k,x_{k+1}=b_{k+1}} = [\![B]\!]^{\mathcal{M}}_{x_1=a_1,\ldots,x_k=a_k,x_{k+1}=a_{k+1}} = 1$$

De manière symétrique (mais où le Destructeur joue de l'autre côté) : si
$[\![\forall x_{k+1}\ B]\!]^{\mathcal{N}}_{x_1=b_1,\ldots,x_k=b_k} = 1$, alors $[\![\forall x_{k+1}\ B]\!]^{\mathcal{M}}_{x_1=a_1,\ldots,x_k=a_k} = 1$

Le cas du quantificateur existentiel est similaire

Les autres cas sont triviaux

Un corollaire



2^n sommets sur chaque roue
Pour les jeux en n coups, le Duplicateur a une stratégie gagnante

Donc $\mathcal{G}_1^n$ et $\mathcal{G}_2^n$ valident les mêmes propositions closes de rang $\leq n$
(il faut plus de n quantificateurs imbriqués pour les séparer)

La non-définissabilité de la connexité

Si la connexité était définie par une proposition A
Cette proposition A serait valide dans tous les $\mathcal{G}_1^n$ mais dans aucun $\mathcal{G}_2^n$

Cette proposition A aurait un rang m

La proposition A serait valide dans $\mathcal{G}_1^m$ mais pas dans $\mathcal{G}_2^m$
Or $\mathcal{G}_1^m$ et $\mathcal{G}_2^m$ valident les mêmes propositions de rang m

Une conséquence

Un langage formé d'un seul symbole R (prédicat binaire)

Pas de proposition S avec x et y libres qui exprime la clôture transitive de R

Sinon $\forall x \forall y\ S$ exprimerait la connexité

V. Ce que nous avons vu dans ce cours

Les notions fondamentales de la logique

Langage, démonstration, algorithme, modèle et ensemble
Les quatre branches de la logique contemporaine

- La théorie de la démonstration
- La théorie de la calculabilité
- La théorie des modèles
- La théorie des ensembles (et la théorie des types)

La notion de langage est transverse : toutes les branches de la logiques utilisent la notion de langage et nous apprennent quelque chose sur cette notion

C'est cette notion de langage qui constitue l'unité de la logique et lui donne son nom de science du $\lambda ó \gamma o \varsigma$

Cette notion déborde aujourd'hui de la logique (langages de programmation, grammaires, automates...)

Vers une théorie unifiée des langages ?