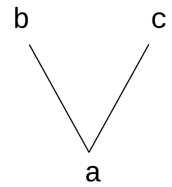


est-elle faiblement complète ? Est-elle fortement complète ?

Remarquons que si la relation d'ordre $\leq$ sur l'ensemble `E` est fortement complète, alors tout sous-ensemble de `E` a également une borne inférieure. En effet, soit `A` un sous-ensemble quelconque de `E`, soit `B` l'ensemble $\{y \in E \mid \forall\ x \in A\ y \leq x\}$ des minorants de `A` et `l` la borne supérieure de `B`. Par définition, `l` est un majorant de l'ensemble `B`

– $\forall y \in B\ y \leq l$

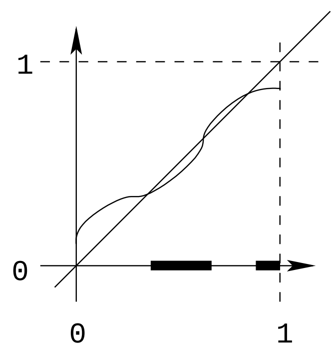
et c'est le plus petit

– $(\forall y \in B\ y \leq l') \Rightarrow l \leq l'$

Il n'est pas difficile de démontrer que `l` est la borne inférieure de `A`. En effet, si `x` est un élément de `A`, c'est un majorant de `B` et comme `l` est le plus petit de ces majorants, $l \leq x$. Donc `l` est un minorant de `A`. Pour montrer que c'est le plus grand, il suffit de remarquer que si `m` est un minorant de `A`, c'est un élément de `B` et donc $m \leq l$.

La borne inférieure d'un sous-ensemble `B` de l'ensemble des parties d'un ensemble `A` est, bien entendu, l'ensemble $\bigcap_{C \in B} C$.

Second théorème du point fixe. Soit $\leq$ une relation d'ordre fortement complète sur un ensemble `E`. Soit `f` une fonction de `E` dans `E`. Si `f` est croissante alors $p = \inf \{c \mid f\ c \leq c\}$ est le plus petit point fixe de `f`.



Démonstration. Soit `C` l'ensemble $\{c \mid f\ c \leq c\}$ et `c` un élément de `C`. On a $p \leq c$ car `p` est un minorant de `C`. La fonction `f` étant croissante, on en déduit $f\ p \leq f\ c$. Par ailleurs, $f\ c \leq c$ car `c` est un élément de `C`, donc par transitivité $f\ p \leq c$.

L'élément `f p` est inférieur à tous les éléments de `C`, il est donc inférieur à sa borne inférieure : $f\ p \leq p$.