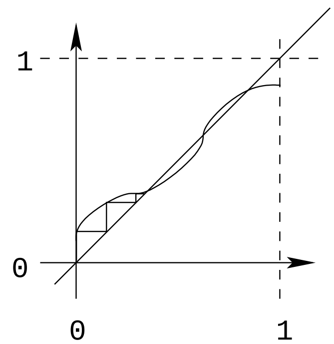
Soit $\mathtt{A}$ un ensemble quelconque, la relation d'inclusion $\subseteq$ sur l'ensemble $\wp(\mathtt{A})$ des parties de $\mathtt{A}$ est un autre exemple de relation d'ordre faiblement complète. La limite d'une suite croissante $\mathtt{U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots}$ est l'ensemble $\bigcup_{\mathtt{i}\in\mathbb{N}}\mathtt{U_i}$. De plus, cette relation a un plus petit élément $\varnothing$.

Soit $\mathtt{f}$ une fonction de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{E}$. La fonction $\mathtt{f}$ est *croissante* si $\mathtt{x} \leq \mathtt{y} \Rightarrow \mathtt{f\ x} \leq \mathtt{f\ y}$. Elle est *continue* si, en outre, pour toute suite croissante $\mathtt{lim\ (f\ u_i) = f\ (lim\ u_i)}$.

Premier théorème du point fixe. Soit $\leq$ une relation d'ordre faiblement complète sur un ensemble $\mathtt{E}$ qui a un plus petit élément $\mathtt{m}$. Soit $\mathtt{f}$ une fonction de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{E}$. Si $\mathtt{f}$ est continue alors $\mathtt{p = lim\ (f^i\ m)}$ est le plus petit point fixe de $\mathtt{f}$.



Démonstration. Tout d'abord, $\mathtt{m}$ étant le plus petit élément de $\mathtt{E}$, $\mathtt{m} \leq \mathtt{f\ m}$. La fonction $\mathtt{f}$ étant croissante, $\mathtt{f^i\ m} \leq \mathtt{f^{i+1}\ m}$. La suite $\mathtt{f^i\ m}$ est croissante, elle a donc bien une limite. La suite $\mathtt{f^{i+1}\ m}$ a également $\mathtt{p}$ pour limite. Donc $\mathtt{p = lim\ (f\ (f^i\ m)) = f\ (lim\ (f^i\ m)) = f\ p}$. De plus, $\mathtt{p}$ est le plus petit point fixe, car si $\mathtt{q}$ est un point fixe, $\mathtt{m} \leq \mathtt{q}$ et la fonction $\mathtt{f}$ étant croissante, $\mathtt{f^i\ m} \leq \mathtt{f^i\ q = q}$. Donc $\mathtt{p = lim\ f^i\ m} \leq \mathtt{q}$.

Le second théorème du point fixe donne l'existence d'un point fixe pour les fonctions croissantes, même si elles ne sont pas continues, en supposant une propriété un peu plus forte sur la relation d'ordre.

Une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble $\mathtt{E}$ est *fortement complète* si tous les sous-ensembles de $\mathtt{E}$ ont une borne supérieure.

La relation d'ordre ordinaire sur l'intervalle $\mathtt{[0,\ 1]}$ de la droite réelle est un exemple de relation d'ordre fortement complète. La relation d'ordre ordinaire sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas fortement complète car l'ensemble $\mathbb{R}^+$ tout entier n'a pas de borne supérieure.

Soit $\mathtt{A}$ un ensemble quelconque, la relation d'inclusion $\subseteq$ sur l'ensemble $\wp(\mathtt{A})$ des parties de $\mathtt{A}$ est un autre exemple de relation d'ordre fortement complète. La borne supérieure d'un ensemble $\mathtt{B}$ est l'ensemble $\bigcup_{\mathtt{C}\in\mathtt{B}}\mathtt{C}$.

Exercice 1.1 *Montrer que toute relation fortement complète est faiblement complète.*

La relation d'ordre