Chapitre 1

Les termes et les relations

1.1 Les définitions inductives

Puisque la sémantique d'un langage de programmation est une relation, nous allons commencer par présenter quelques outils qui permettent de définir des ensembles et des relations.

L'outil le plus simple est la notion de *définition explicite.* On peut, par exemple, définir explicitement la fonction qui multiplie son argument par $\mathtt{2}$: $\mathtt{x} \mapsto \mathtt{2} * \mathtt{x}$, l'ensemble des nombres pairs : $\{\mathtt{n} \in \mathbb{N} \mid \exists \mathtt{p} \in \mathbb{N}\ \mathtt{n} = \mathtt{2} * \mathtt{p}\}$ ou la relation de divisibilité : $\{(\mathtt{n},\mathtt{m}) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \mathtt{p} \in \mathbb{N}\ \mathtt{n} = \mathtt{m} * \mathtt{p}\}$. Cependant, ces définitions explicites ne suffisent pas à définir tous les objets dont on a besoin. Un deuxième outil utile pour définir des ensembles et des relations est la notion de *définition inductive.* Cet outil s'appuie sur un théorème simple : le théorème du point fixe.

1.1.1 Le théorème du point fixe

Soit $\leq$ une relation d'ordre — c'est-à-dire une relation réflexive, antisymétrique et transitive — sur un ensemble $\mathtt{E}$ et $\mathtt{u}_0,\ \mathtt{u}_1,\ \mathtt{u}_2,\ \ldots$ une suite croissante, c'est-à-dire telle que $\mathtt{u}_0 \leq \mathtt{u}_1 \leq \mathtt{u}_2 \leq \ldots$ L'élément $\mathtt{l}$ de $\mathtt{E}$ est appelé *limite* de la suite $\mathtt{u}_0,\ \mathtt{u}_1,\ \mathtt{u}_2,\ \ldots$ si c'est la borne supérieure de l'ensemble $\{\mathtt{u}_0,\ \mathtt{u}_1,\ \mathtt{u}_2,\ \ldots\}$ c'est-à-dire si

– pour tout $\mathtt{i}$, $\mathtt{u}_\mathtt{i} \leq \mathtt{l}$
– si pour tout $\mathtt{i}$, $\mathtt{u}_\mathtt{i} \leq \mathtt{l'}$ alors $\mathtt{l} \leq \mathtt{l'}$.

Si elle existe, la limite d'une suite $(\mathtt{u}_\mathtt{i})_\mathtt{i}$ est unique, et on la note $\mathtt{lim}_\mathtt{i}\ \mathtt{u}_\mathtt{i}$.

La relation d'ordre $\leq$ est dite *faiblement complète* si toutes les suites croissantes ont une limite.

La relation d'ordre ordinaire sur l'intervalle $[\mathtt{0},\ \mathtt{1}]$ de la droite réelle est un exemple de relation d'ordre faiblement complète. De plus, cette relation a un plus petit élément $\mathtt{0}$. En revanche, la relation d'ordre ordinaire sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas faiblement complète car la suite croissante $\mathtt{0},\ \mathtt{1},\ \mathtt{2},\ \mathtt{3},\ \ldots$ n'a pas de limite.