nom si et seulement si $[\![\texttt{t}]\!]$ = n. Le sens direct de ce théorème n'est pas trop difficile à démontrer, mais la réciproque n'est pas triviale.

Exercice 5.9 *Montrer, en utilisant le théorème d'équivalence des sémantiques, que si* `t` *est un terme clos de type* `nat` *tel que* $[\![\texttt{t}]\!] = \perp$*, alors il n'existe pas de constante entière* `n` *telle que* $\texttt{t} \hookrightarrow \texttt{n}$.

Exercice 5.10 *Soit* `G` *la sémantique dénotationnelle du terme* `fun f:(nat -> nat) -> fun n:nat -> ifz n then 1 else n * (f (n - 1))`.

La sémantique dénotationnelle du terme `fix f:(nat -> nat) fun n:nat -> ifz n then 1 else n * (f (n - 1))` *est le plus petit point fixe de* `G`*. D'après le premier théorème du point fixe, c'est la limite de la suite* $\texttt{G}^{\texttt{n}}(\perp_{\texttt{nat->nat}})$*. Quelle est la fonction* $\perp_{\texttt{nat->nat}}$ *? Quelle est la fonction* $\texttt{G}^{\texttt{n}}(\perp_{\texttt{nat->nat}})$ *? Quelle est la limite de cette suite ?*

Montrer que pour tout entier `p`*, il existe un entier* `m` *tel que* $\texttt{G}^{\texttt{m}}(\perp_{\texttt{nat->nat}})(\texttt{p}) = \texttt{lim}_{\texttt{n}}\ \texttt{G}^{\texttt{n}}(\perp_{\texttt{nat->nat}})(\texttt{p})$.

Exercice 5.11 *On considère les éléments suivants de l'ensemble* $[\![\texttt{nat -> nat}]\!]$ *:* `u` *la fonction qui vaut* $\perp$ *en* $\perp$ *et* `0` *partout ailleurs,* $\texttt{v}_\texttt{i}$ *la fonction qui vaut* $\perp$ *en* $\perp$ *et* `1` *en* `i` *et* `0` *partout ailleurs et* $\texttt{w}_\texttt{i}$ *la fonction qui vaut* $\perp$ *en* $\perp$, `0` *en* `0`, `1`*, ...,* `i-1` *et* $\perp$ *partout ailleurs.*

Soit `F` *une fonction croissante de* $[\![\texttt{nat -> nat}]\!]$ *dans* $[\![\texttt{nat}]\!]$*, telle que* `F u = 0` *et pour tout* `i`, $\texttt{F v}_\texttt{i} = \texttt{1}$*. Montrer que pour tout* `i`, $\texttt{F w}_\texttt{i} = \perp$*. Montrer que la fonction* `F` *n'est pas continue.*

Montrer qu'on ne peut pas programmer en PCF une fonction qui prend en argument une fonction `g` *de type* `nat -> nat` *et retourne* `0` *si pour tout* `n`, `g n = 0` *et* `1` *sinon.*

Exercice 5.12 *(Une approche informationnelle de la continuité) On peut être surpris du fait que l'on utilise la notion de continuité pour définir la sémantique de PCF alors que PCF ne calcule qu'avec des nombres entiers et non avec des nombres réels. En fait, les fonctions de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*, les suites entières, ont beaucoup de points communs avec les réels.*

Une bonne intuition est qu'une fonction `f` *des réels dans les réels est continue si pour calculer les* `n` *premières décimales de* `f x` *il suffit de connaître un nombre fini de décimales de* `x`*. Malheureusement, cela est techniquement faux quand* `x` *ou* `f x` *est un nombre décimal. On dira donc qu'un décimal est une approximation à* `n` *décimales d'un réel si la distance entre ce décimal et ce réel est inférieure à* $\texttt{10}^{-\texttt{n}}$*. Ainsi, le nombre* π *a deux approximations à deux décimales :* `3.14` *et* `3.15` *et il devient correct de dire que la fonction* `f` *est continue si pour calculer une approximation décimale à* `n` *décimales de* `f x` *il suffit de connaître une certaine approximation décimale de* `x`.

Le but de cet exercice est de montrer que, de manière similaire, une fonction `f` *des suites entières dans les suites entières est continue si pour calculer les* `n` *premiers termes de* `f x` *il suffit de connaître un segment initial fini de* `x`*. Si on appelle approximation finie d'une suite infinie, ses segments initiaux finis, cela*