Montrons maintenant que ces relations d'ordre sont faiblement complètes. La relation d'ordre sur $[\![\texttt{nat}]\!]$ est faiblement complète car une suite croissante est ou bien constante, ou alors elle a la forme $\perp$, $\perp$, ..., $\perp$, n, n, ... et elle a donc une limite dans tous les cas.

Montrons maintenant que si les relations d'ordre sur $[\![\texttt{A}]\!]$ et $[\![\texttt{B}]\!]$ sont faiblement complètes, c'est également le cas de la relation d'ordre sur $[\![\texttt{A -> B}]\!]$. Considérons pour cela une suite croissante $\texttt{f}_\texttt{n}$ à valeur dans $[\![\texttt{A -> B}]\!]$. Par définition de la relation d'ordre sur $[\![\texttt{A -> B}]\!]$, pour tout x dans $[\![\texttt{A}]\!]$, la suite, à valeurs dans $[\![\texttt{B}]\!]$, $\texttt{f}_\texttt{n}$ x est croissante également, elle a donc une limite. On appelle F la fonction qui à x associe $\texttt{lim}_\texttt{n}$ ($\texttt{f}_\texttt{n}$ x). On peut montrer — mais nous ne le ferons pas ici — que la fonction F appartient à $[\![\texttt{A -> B}]\!]$, c'est-à-dire qu'elle est continue, ce qui demande un lemme de permutation de limites. Par construction, la fonction F majore toutes les fonctions $\texttt{f}_\texttt{n}$, et c'est la plus petite fonction qui les majore. C'est donc la limite de la suite $\texttt{f}_\texttt{n}$. Toute suite croissante a une limite et la relation d'ordre sur $[\![\texttt{A -> B}]\!]$ est donc faiblement complète.

Chaque ensemble $[\![\texttt{A}]\!]$ a un plus petit élément que l'on note $\perp_\texttt{A}$. Le plus petit élément de $[\![\texttt{nat}]\!]$ est $\perp$ et celui de $[\![\texttt{A -> B}]\!]$ est la fonction constante identiquement égale à $\perp_\texttt{B}$.

5.3.4 La sémantique du point fixe

On peut reprendre la définition de la sémantique dénotationnelle d'un terme de PCF typé en ajoutant le cas de la construction fix

- $[\![\texttt{x}]\!]_\texttt{e}$ = a, si e contient la définition x = a,
- $[\![\texttt{fun x:A -> t}]\!]_\texttt{e}$ = fun a:$[\![\texttt{A}]\!]$ -> $[\![\texttt{t}]\!]_{\texttt{e,x=a}}$,
- $[\![\texttt{t u}]\!]_\texttt{e}$ = $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}$ $[\![\texttt{u}]\!]_\texttt{e}$,
- $[\![\texttt{n}]\!]_\texttt{e}$ = n,
- $[\![\texttt{t} \otimes \texttt{u}]\!]_\texttt{e}$ = $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e} \otimes [\![\texttt{u}]\!]_\texttt{e}$, si $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}$ et $[\![\texttt{u}]\!]_\texttt{e}$ sont des entiers et $\perp$ sinon,
- $[\![\texttt{ifz t then u else v}]\!]_\texttt{e}$ = $[\![\texttt{u}]\!]_\texttt{e}$ si $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}$ = 0, $[\![\texttt{v}]\!]_\texttt{e}$ si $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}$ est une constante entière différente de 0 et $\perp_\texttt{A}$, où A est le type de ce terme, si $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}$ = $\perp_\texttt{nat}$.
- $[\![\texttt{fix x:A t}]\!]_\texttt{e}$ = FIX (fun a:$[\![\texttt{A}]\!]$ -> $[\![\texttt{t}]\!]_{\texttt{e,x=a}}$) où FIX(f) est le plus petit point fixe de la fonction continue f,
- $[\![\texttt{let x:A = t in u}]\!]_\texttt{e}$ = $[\![\texttt{u}]\!]_{\texttt{e,x=}[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}}$.

Pour que cette définition soit correcte, on doit démontrer que si t est un terme de type A alors $[\![\texttt{t}]\!]$ est bien un élément de $[\![\texttt{A}]\!]$, c'est-à-dire que c'est une fonction continue. Nous ne donnerons pas cette démonstration ici, mais c'est le cas.

Exercice 5.7 *Quelle est la sémantique du terme* fun x:nat -> 0 *? Quelle est la sémantique du terme* fix x:nat x *? Quelle est la sémantique du terme* (fun x:nat -> 0) (fix x:nat x) *?*

Exercice 5.8 *Quelle est la valeur de* $[\![\texttt{ifz t then u else v}]\!]_\texttt{e}$*, si* $[\![\texttt{t}]\!]_\texttt{e}$ = 0, $[\![\texttt{u}]\!]_\texttt{e}$ = 0 *et* $[\![\texttt{v}]\!]_\texttt{e}$ = $\perp_\texttt{nat}$ *?*

On peut maintenant énoncer le théorème d'équivalence des sémantiques. Soit t un terme clos de type nat et n une constante entière : t $\hookrightarrow$ n en appel par