matière de définition de fonctions. En mathématiques, contrairement à ce qui se passe en PCF, on ne peut prendre le point fixe d'une fonction que quand celle-ci a un point fixe, et si elle en a plusieurs, il est nécessaire de préciser celui dont on parle. Nous avons évoqué ces questions lors de la définition de PCF, pour les repousser. Le moment est venu d'y faire face.

Considérons une fonction qui n'a pas de point fixe : la fonction `fun x:nat -> x + 1`. En PCF, nous pouvons cependant construire le terme `fix x:nat (x + 1)`. De même, la fonction `fun f:(nat -> nat) -> fun x:nat -> (f x) + 1` n'a pas de point fixe, mais nous pouvons construire le terme `fix f:(nat -> nat) fun x:nat -> (f x) + 1`. La fonction `fun x:nat -> x`, quant à elle, a plusieurs points fixes, ce qui ne nous empêche pas de construire le terme `fix x:nat x`.

Lors de la définition de la sémantique opérationnelle de PCF, nous avons donné une règle de réduction pour la construction `fix`

$$\texttt{fix x:A t} \longrightarrow \texttt{(fix x:A t/x)t}$$

qui traduit l'idée de point fixe. En suivant cette règle nous voyons que le terme `a = fix x:nat (x + 1)` se réduit sur `a + 1`, puis sur `(a + 1) + 1`, ... sans jamais arriver à un terme irréductible. De même, si `g = fix f:(nat -> nat) fun x:nat -> (f x) + 1`, le terme `g 0` se réduit, en deux étapes, sur `(g 0) + 1`, puis `((g 0) + 1) + 1`, ... sans jamais arriver à un terme irréductible. De même, le terme `b = fix x:nat x` se réduit sur `b`, puis sur `b`, ... sans jamais arriver à un terme irréductible. Autrement dit, il semble que quand on prend, en PCF, le point fixe d'une fonction qui n'en a pas ou qui en a plusieurs, on construit un programme qui boucle.

Il en est de même en Caml, où le programme

```
let rec f x = (f x) + 1 in (f 0)
```

boucle ou en Java où c'est également le cas du programme

```
class Loop {
 static int f (int x) {return f(x) + 1;}
 static public void main (String [ ] args) {
  System.out.println(f(0));}}
```

Il y a même des fonctions, comme `fun x:nat -> x + x` qui ont un point fixe unique, mais dont le point fixe en PCF, `fix x:nat (x + x)`, boucle.

Autrement dit, pour pouvoir comprendre la sémantique dénotationnelle du point fixe, il faut commencer par comprendre la sémantique des termes dont l'interprétation ne termine pas.

La sémantique opérationnelle à petits pas n'attribue pas de résultat au calcul de ces termes : il n'y a pas de terme `V` telle que `fix x:nat (x + 1)` $\hookrightarrow$ `V`. Et la sémantique opérationnelle à grands pas n'en attribue pas davantage. Comme nous l'avons déjà dit, il est possible de compléter la relation $\hookrightarrow$ en ajoutant une valeur $\perp$ telle que `fix x:nat (x + 1)` $\hookrightarrow$ $\perp$.