3.4.1 Une première variante : les fermetures récursives

On peut distinguer les fermetures de la forme `⟨x, t, (e, f = ⟨fixfun f x -> t, e⟩)⟩`. On les note `⟨f, x, t, e⟩` et on les appelle *fermetures récursives*.

La règle d'interprétation de la construction `fixfun f x -> t` se reformule alors ainsi

$$\frac{}{\texttt{e} \vdash \texttt{fixfun f x -> t} \hookrightarrow \langle\texttt{f, x, t, e}\rangle}$$

Quand on interprète une application `t u` en appel par valeur, si le terme `t` s'interprète sur la fermeture récursive `⟨f, x, t', e'⟩`, c'est-à-dire `⟨x, t', (e', f = ⟨fixfun f x -> t', e'⟩)⟩` et le terme `u` sur une valeur `W`, alors pour interpréter le terme `t u`, la règle de l'application nous demande d'interpréter le terme `t'` dans l'environnement `e', f = ⟨fixfun f x -> t', e'⟩, x = W`.

On peut anticiper l'interprétation du glaçon `⟨fixfun f x -> t', e⟩` qui apparaît dans cet environnement, ce qui donne, d'après la règle du `fixfun`, la fermeture récursive `⟨f, x, t', e'⟩`. Pour le cas des fermetures récursives, la règle de l'application peut donc se spécialiser en

$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{e} \vdash \texttt{u} \hookrightarrow \texttt{W}\\ \texttt{e} \vdash \texttt{t} \hookrightarrow \langle\texttt{f, x, t', e'}\rangle\\ \texttt{(e', f = }\langle\texttt{f, x, t', e'}\rangle\texttt{, x = W)} \vdash \texttt{t'} \hookrightarrow \texttt{V}\end{array}}{\texttt{e} \vdash \texttt{t u} \hookrightarrow \texttt{V}}$$

Dans cette règle, on n'utilise plus de glaçons. Ainsi, en appel par valeur, introduire des fermetures récursives permet de se passer complètement de glaçons et de supprimer la règle d'interprétation des glaçons.

Dernière simplification : les fermetures ordinaires `⟨x, t, e⟩` peuvent être remplacées par des fermetures récursives `⟨f, x, t, e⟩` dans lesquelles `f` est une variable quelconque qui n'apparaît pas dans `t`. On peut alors supprimer la règle d'application dans le cas des fermetures ordinaires.

On obtient finalement les règles

$$\frac{}{\texttt{e} \vdash \texttt{x} \hookrightarrow \texttt{V}} \text{ si } \texttt{e} \text{ contient } \texttt{x = V}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{e} \vdash \texttt{u} \hookrightarrow \texttt{W}\\ \texttt{e} \vdash \texttt{t} \hookrightarrow \langle\texttt{f, x, t', e'}\rangle\\ \texttt{(e', f = }\langle\texttt{f, x, t', e'}\rangle\texttt{, x = W)} \vdash \texttt{t'} \hookrightarrow \texttt{V}\end{array}}{\texttt{e} \vdash \texttt{t u} \hookrightarrow \texttt{V}}$$

$$\frac{}{\texttt{e} \vdash \texttt{fun x -> t} \hookrightarrow \langle\texttt{f, x, t, e}\rangle}$$

où `f` est une variable quelconque qui n'apparaît ni dans `t` ni dans `e` et qui est distincte de `x`

$$\frac{}{\texttt{e} \vdash \texttt{fixfun f x -> t} \hookrightarrow \langle\texttt{f, x, t, e}\rangle}$$