

$$\begin{array}{c}
\frac{}{e \vdash \text{fun } x \rightarrow t \hookrightarrow \langle x, t, e \rangle} \\
\\
\frac{}{e \vdash n \hookrightarrow n} \\
\\
\frac{e \vdash u \hookrightarrow q \quad e \vdash t \hookrightarrow p}{e \vdash t \otimes u \hookrightarrow n} \text{ si } p \otimes q = n \\
\\
\frac{e \vdash t \hookrightarrow 0 \quad e \vdash u \hookrightarrow V}{e \vdash \text{ifz } t \text{ then } u \text{ else } v \hookrightarrow V} \\
\\
\frac{e \vdash t \hookrightarrow n \quad e \vdash v \hookrightarrow V}{e \vdash \text{ifz } t \text{ then } u \text{ else } v \hookrightarrow V} \begin{array}{l} \text{si } n \text{ constante} \\ \text{entière } \neq 0 \end{array} \\
\\
\frac{(e, x = \langle \text{fix } x \ t, e \rangle) \vdash t \hookrightarrow V}{e \vdash \text{fix } x \ t \hookrightarrow V} \\
\\
\frac{e \vdash t \hookrightarrow W \quad (e, x = W) \vdash u \hookrightarrow V}{e \vdash \text{let } x = t \text{ in } u \hookrightarrow V}
\end{array}$$

Exercice 3.4 Quand on calcule la valeur du terme (fact 3) où la fonction fact est définie par $\text{fix } f \text{ fun } n \rightarrow \text{ifz } n \text{ then } 1 \text{ else } n * (f (n - 1))$, on commence par appeler récursivement la fonction fact avec l'argument 2, ce qui amène à associer la variable n à la valeur 2. Quand on revient de cet appel récursif pour calculer la valeur de n et effectuer la multiplication, la variable n est-elle associée à la valeur 2 ou à la valeur 3 ? Pourquoi ?

Exercice 3.5 Écrire un interpréteur pour PCF en appel par valeur.

3.3 Une optimisation : les indices de De Bruijn

Dans les règles de sémantique opérationnelle à grands pas avec des environnements, les environnements sont des listes de couples formés d'une variable et d'une valeur étendue. On peut les remplacer par des couples de listes de même longueur, l'une contenant les variables et l'autre les valeurs étendues. Ainsi, la liste $x = 12, y = 14, z = 16, w = 18$ peut être remplacée par la liste de variables x, y, z, w et la liste de valeurs étendues $12, 14, 16, 18$. Pour accéder à la valeur étendue associée à une variable, il suffit de parcourir la première liste afin d'y repérer la position de cette variable et de chercher la valeur étendue de position homologue dans la seconde liste. La position d'une variable dans la première liste est un entier, que l'on appelle l'*indice de De Bruijn* de cette variable dans cet environnement. En général, on associe l'entier 0 au dernier élément de la liste — le plus à droite —, 1 à l'avant dernier, ..., $n - 1$ au premier élément de la liste — le plus à gauche.

La liste de variables dans laquelle chaque occurrence de sous-terme sera interprétée peut se calculer avant de commencer l'interprétation du terme. De ce fait, on peut associer, avant l'interprétation du terme, un indice de De Bruijn à chaque occurrence de variable. Par exemple, si on interprète le terme