– $\mathtt{Var(f(x_1^1...x_{k_1}^1\ t_1,\ ...,\ x_1^n...x_{k_n}^n\ t_n))}$
$\mathtt{= Var(t_1)} \cup \{\mathtt{x_1^1,\ ...,\ x_{k_1}^1}\} \cup \cdots \cup \mathtt{Var(t_n)} \cup \{\mathtt{x_n^n,\ ...,\ x_{k_n}^n}\}$.

On peut également définir l'ensemble des variables libres d'un terme

– $\mathtt{VL(x) = \{x\}}$,
– $\mathtt{VL(f(x_1^1\ ...\ x_{k_1}^1\ t_1,\ ...,\ x_1^n\ ...\ x_{k_n}^n\ t_n))}$
$\mathtt{= (VL(t_1)} \setminus \{\mathtt{x_1^1,\ ...,\ x_{k_1}^1}\}) \cup \cdots \cup (\mathtt{VL(t_n)} \setminus \{\mathtt{x_n^n,\ ...,\ x_{k_n}^n}\})$

Par exemple, `Var (fun x -> sin (cos (sin x))) = {x}` mais `VL (fun x -> sin (cos (sin x))) =` $\varnothing$.

Un terme sans variables libres est dit *clos*.

La *hauteur* d'un terme se définit également par récurrence structurelle

– `Hauteur(x) = 0`,
– $\mathtt{Hauteur(f(x_1^1\ ...\ x_{k_1}^1\ t_1,\ ...,\ x_1^n\ ...\ x_{k_n}^n\ t_n))}$
$\mathtt{= 1 + max(Hauteur(t_1),\ ...,\ Hauteur\ (t_n))}$.

1.2.5 La substitution

La première opération que l'on est amené à définir avec la notion de variable est celle de substitution : le rôle des variables est, en effet, non seulement d'être liées, mais également d'être substituées. Par exemple, quand on applique la fonction `fun x -> sin (cos (sin x))` au terme $2 * \pi$, il faudra, à un moment ou à un autre, substituer dans le terme `sin (cos (sin x))`, la variable `x` par le terme $2 * \pi$.

Une *substitution* est simplement une fonction de domaine fini des variables dans les termes — ou encore, un ensemble fini de couples dont la première composante est une variable et la seconde un terme tel que chaque variable apparaisse dans un couple au plus, ou encore une liste d'associations — $\theta = \mathtt{t_1/x_1\ ...\ t_n/x_n}$.

Quand on applique une substitution à un terme, on veut remplacer toutes les occurrences des variables $\mathtt{x_1}$, ..., $\mathtt{x_n}$ par les termes $\mathtt{t_1}$, ..., $\mathtt{t_n}$.

Bien entendu, ce remplacement ne concerne que les variables libres. Par exemple, si on substitue la variable `x` par le terme `2` dans le terme `x + 3`, on veut obtenir le terme `2 + 3`. En revanche, si on substitue la variable `x` par le terme `2` dans le terme `fun x -> x` qui est la fonction identité, on veut obtenir le terme `fun x -> x` et non le terme `fun x -> 2`.

La première tentative pour définir l'application d'une substitution à un terme est la définition par récurrence structurelle suivante

– $\langle\theta\rangle\mathtt{x_i = t_i}$,
– $\langle\theta\rangle\mathtt{x = x}$ si `x` n'est pas dans le domaine de θ,
– $\langle\theta\rangle\mathtt{f(y_1^1\ ...\ y_{k_1}^1\ u_1,\ ...,\ y_1^n\ ...\ y_{k_n}^n\ u_n)}$
$\mathtt{= f(y_1^1\ ...\ y_{k_1}^1}\ \langle\theta_{|(\mathtt{V}\setminus\{\mathtt{y_1^1,...,y_{k_1}^1}\})}\rangle\mathtt{u_1,\ ...,\ y_1^n...\ y_{k_n}^n}\ \langle\theta_{|(\mathtt{V}\setminus\{\mathtt{y_1^n,...,y_{k_n}^n}\})}\rangle\mathtt{u_n)}$

où la notation $\theta_{|\mathtt{V}\setminus\{\mathtt{y_1,...,y_k}\}}$ désigne la substitution θ restreinte à l'ensemble $\mathtt{V} \setminus \{\mathtt{y_1, ..., y_k}\}$, c'est-à-dire dans laquelle on a supprimé les couples dont la première composante est l'une des variables $\mathtt{y_1, ..., y_k}$.

Cette définition pose néanmoins un problème, car elle autorise les *captures de variables*. Par exemple, le terme `fun x -> (x + y)` exprime la fonction qui ajoute une certaine quantité `y` à son argument. Si on substitue `y` par `4` dans ce