

fonctions. Ce langage comprend donc quatre symboles : `sin` et `cos` qui sont des constantes, `α` d'arité (0,0) et `fun` d'arité (1), l'ensemble des termes est défini inductivement par

- les variables sont des termes,
- `sin` est un terme,
- `cos` est un terme,
- si `t` et `u` sont des termes alors `α(t,u)` est un terme,
- `t` est un terme et `x` une variable alors `fun(x t)` est un terme.

On est libre d'adopter ensuite une convention d'écriture plus simple et de noter `t u` le terme `α(t,u)` et `fun x -> t` le terme `fun(x t)`.

Un exemple de terme de ce langage est `fun x -> sin (cos (sin x))`.

1.2.3 Les langages à plusieurs sortes d'objets

On aura parfois besoin, dans ce livre, d'utiliser des langages un peu plus généraux appelés *langages à plusieurs sortes d'objets*. Un exemple est le langage permettant d'exprimer des vecteurs avec un nombre fini de constantes, la somme et le produit par un scalaire. Dans ce langage, il y a deux sortes de termes : ceux qui expriment un vecteur et ceux qui expriment un scalaire. Dans la définition du langage, on doit indiquer que le symbole `+` a deux arguments, *qui sont tous les deux des vecteurs* et que le symbole `.` a deux arguments *dont le premier est un scalaire et le second un vecteur*.

Pour cela, on introduit un ensemble à deux éléments `{vect, scal}` dont les éléments sont appelés des *sortes* et on associe au symbole `.` l'arité `(scal, vect, vect)` qui indique que dans un terme de la forme `λ.v`, le terme `λ` doit être de sorte `scal`, le terme `v` de sorte `vect` et que, dans ce cas, le terme `λ.v` est lui-même de sorte `vect`.

Quand on a, de plus, des variables liées, l'arité d'un symbole `f` est une suite finie `((s11, ..., sk11, s'1), ..., (s1n, ..., sknn, s'n), s'')` qui indique que le symbole `f` a `n` arguments, que le premier est de sorte `s'1` et qu'il lie `k1` variables de sortes `s11, ..., sk11, ...`, et que le terme formé a lui-même la sorte `s''`.

Quand on s'est donné un langage — c'est-à-dire un ensemble de sortes et un ensemble de symboles chacun muni d'une arité — et une famille, indexée par les sortes, d'ensembles infinis et disjoints pour les variables de chaque sorte, on définit les termes inductivement par

- les variables de sorte `s` sont des termes de sorte `s`,
- si `f` est un symbole d'arité `((s11, ..., sk11, s'1), ..., (s1n, ..., sknn, s'n), s'')`, `x11, ..., xk11, ..., x1n, ..., xknn` sont des variables de sortes `s11, ..., sk11, ..., s1n, ..., sknn` et `t1, ..., tn` sont des termes de sortes `s'1, ..., s'n` alors `f(x11...xk11 t1, ..., x1n...xknn tn)` est un terme de sorte `s''`.

1.2.4 Les variables libres et liées

L'ensemble des variables d'un terme se définit par récurrence structurelle

- `Var(x) = {x}`,