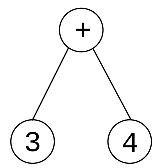
1.2 Les langages

1.2.1 Les langages sans variables

Maintenant que nous avons introduit la notion de définition inductive, nous allons l'utiliser pour définir la notion de *langage*. Nous cherchons ici à définir une notion de langage qui s'affranchit des conventions syntaxiques superficielles, par exemple de savoir si on écrit `3 + 4`, `+(3,4)`, ou encore `3 4 +`. Ce terme sera plus abstraitement exprimé par un arbre



Chaque nœud de cet arbre est étiqueté par un symbole. Le nombre d'enfants d'un nœud de l'arbre dépend du symbole qui l'étiquette — `2` enfants si ce symbole est `+`, `0` si c'est `3` ou `4`, ...

Un langage est donc un ensemble de symboles munis d'un entier appelé *arité*, ou plus simplement *nombre d'arguments*, de ce symbole. Les symboles sans arguments sont appelés des *constantes*.

L'ensemble des *termes* de ce langage est l'ensemble d'arbres défini inductivement par

– si `f` est un symbole à `n` arguments et $\mathtt{t}_1$, ..., $\mathtt{t}_\mathtt{n}$ sont des termes alors $\mathtt{f(t_1, ..., t_n)}$ — c'est-à-dire l'arbre dont la racine est étiquetée par `f` et dont les sous-arbres immédiats sont $\mathtt{t}_1$, ..., $\mathtt{t}_\mathtt{n}$ — est un terme.

1.2.2 Les variables

Imaginons que nous voulions définir un langage pour exprimer des fonctions. Une possibilité est de se donner des constantes `sin`, `cos`, ... et un symbole à deux arguments $\circ$. On peut, par exemple, construire, dans ce langage, le terme $\mathtt{sin} \circ (\mathtt{cos} \circ \mathtt{sin})$.

Cependant, nous savons que, pour exprimer des fonctions, il vaut mieux utiliser une invention attribuée à F. Viète (1540-1603) : la notion de variable. Ainsi, la fonction ci-dessus s'écrit plus volontiers `sin (cos (sin x))`.

Depuis les années trente, on écrit plutôt cette fonction $\mathtt{x} \mapsto \mathtt{sin\ (cos\ (sin\ x))}$ ou $\lambda\mathtt{x}\ \mathtt{sin\ (cos\ (sin\ x))}$, en utilisant le symbole $\mapsto$ ou λ qui *lie* la variable `x`. Indiquer ainsi explicitement quelles sont les variables liées, permet de distinguer les arguments de la fonction de ses paramètres éventuels, et également de préciser l'ordre de ses arguments.

Le symbole $\mapsto$ aurait été introduit par N. Bourbaki autour de 1930 et le symbole λ par A. Church à la même époque. La notation λ serait une simplification d'une notation antérieure $\hat{\mathtt{x}}\ \mathtt{sin\ (cos\ (sin\ x))}$ utilisée par A.N. Whitehead et B. Russell depuis les années 1900.