Le nombre 8, par exemple, est dans l'ensemble des nombres pairs, en voici une dérivation

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathtt{0}}{\mathtt{2}}}{\mathtt{4}}}{\mathtt{6}}}{\mathtt{8}}$$

En notant P l'ensemble des nombres pairs, on écrit aussi parfois cette dérivation

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathtt{0} \in \mathtt{P}}{\mathtt{2} \in \mathtt{P}}}{\mathtt{4} \in \mathtt{P}}}{\mathtt{6} \in \mathtt{P}}}{\mathtt{8} \in \mathtt{P}}$$

1.1.3 La récurrence structurelle

Les définitions inductives donnent un moyen de faire des démonstrations par récurrence. Si une propriété est héréditaire, c'est-à-dire qu'à chaque fois qu'elle est vérifiée par $\mathtt{y_1}$, ..., $\mathtt{y_{n_i}}$, elle est vérifiée par $\mathtt{f_i\ y_1\ ...\ y_{n_i}}$, alors elle est vérifiée par tous les éléments de E.

Une manière de démontrer cela est d'utiliser le second théorème du point fixe et de remarquer que le sous-ensemble P de A des objets qui vérifient la propriété en question est fermé par les fonctions $\mathtt{f_i}$ et donc qu'il contient E. Une autre manière est d'utiliser le premier théorème du point fixe et de montrer par récurrence sur k que tous les objets de $\mathtt{F^k}\ \varnothing$ vérifient la propriété en question.

1.1.4 La fermeture réflexive-transitive d'une relation

Un exemple de définition inductive est celle de la fermeture réflexive-transitive d'une relation. Si R est une relation binaire sur un ensemble A, on peut définir inductivement une autre relation $\mathtt{R}^*$ appelé fermeture réflexive-transitive de R

$$\frac{}{\mathtt{x\ R^*\ y}}\ \text{si } \mathtt{x\ R\ y}$$

$$\frac{}{\mathtt{x\ R^*\ x}}$$

$$\frac{\mathtt{x\ R^*\ y} \qquad \mathtt{y\ R^*\ z}}{\mathtt{x\ R^*\ z}}$$

Si on voit R comme un graphe orienté, la relation $\mathtt{R}^*$ est la relation qui relie deux sommets quand il y a un chemin qui va de l'un à l'autre.