

$$m = b \\ | a m c$$

Pour montrer qu'il y a toujours un plus petit sous-ensemble de  $A$  fermé par les fonctions  $f_1, f_2, \dots$ , on définit une fonction  $F$  de  $\wp(A)$  dans  $\wp(A)$

$$F C = \{x \in A \mid \exists i \exists y_1 \dots y_{n_i} \in C \ x = f_i y_1 \dots y_{n_i}\}$$

Un sous-ensemble  $C$  de  $A$  est fermé par les fonctions  $f_1, f_2, \dots$  si et seulement si  $F C \subseteq C$ .

La fonction  $F$  est trivialement croissante, c'est-à-dire que si  $C \subseteq C'$  alors  $F C \subseteq F C'$ . Elle est, de plus, continue, c'est-à-dire que si  $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$  alors  $F (\bigcup_j C_j) = \bigcup_j (F C_j)$ . En effet, si un élément  $x$  de  $A$  est dans  $F (\bigcup_j C_j)$ , alors il existe un entier  $i$  et des éléments  $y_1, \dots, y_{n_i}$  de  $\bigcup_j C_j$  tels que  $x = f_i y_1 \dots y_{n_i}$ . Chacun de ces éléments est dans l'un des  $C_j$ . Comme la suite des  $C_j$  est croissante, ils sont tous dans  $C_k$ , le plus grand de ces ensembles. L'élément  $x$  appartient donc à  $F C_k$  et donc à  $\bigcup_j (F C_j)$ . Réciproquement, si  $x$  appartient à  $\bigcup_j (F C_j)$ , il appartient à un certain  $F C_k$ , il existe donc un entier  $i$  et des éléments  $y_1, \dots, y_{n_i}$  de  $C_k$  tels que  $x = f_i y_1 \dots y_{n_i}$ . Les éléments  $y_1, \dots, y_{n_i}$  appartiennent à  $\bigcup_j C_j$ , et donc  $x$  à  $F (\bigcup_j C_j)$ .

On définit l'ensemble  $E$  comme le plus petit point fixe de la fonction  $F$ . Cet ensemble est le plus petit ensemble qui vérifie la propriété  $F E = E$  et d'après le second théorème du point fixe, c'est aussi le plus petit ensemble qui vérifie la propriété  $F E \subseteq E$ . C'est donc bien le plus petit ensemble fermé par les fonctions  $f_1, f_2, \dots$ .

L'ensemble des nombres pairs n'est pas l'unique sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  qui contient 0 et qui est fermé par la fonction  $n \mapsto n + 2$  — l'ensemble  $\mathbb{N}$ , par exemple, vérifie également ces propriétés — mais c'est le plus petit. Il peut être défini comme l'intersection de tous ces ensembles. Le second théorème du point fixe nous permet de généraliser cette remarque et de définir l'ensemble  $E$  comme l'intersection de tous les ensembles fermés par les fonctions  $f_1, f_2, \dots$ .

Le premier théorème du point fixe, quant à lui, montre qu'un objet  $x$  appartient à  $E$  si et seulement s'il existe un entier  $k$  tel que  $x$  appartient à  $F^k \emptyset$ . C'est-à-dire s'il existe une fonction  $f_i$  telle que  $x = f_i y_1 \dots y_{n_i}$  où les  $y_1, \dots, y_{n_i}$  appartiennent à  $F^{k-1} \emptyset$ . En itérant cette remarque, c'est-à-dire en faisant une démonstration par récurrence sur  $k$ , on montre qu'un élément  $x$  de  $A$  appartient à  $E$  si et seulement s'il existe un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des éléments de  $A$ , dont la racine est étiquetée par  $x$ , et tel que si un nœud est étiqueté par un élément  $c$ , alors ses enfants sont étiquetés par des objets  $d_1, \dots, d_n$  tels qu'il existe une règle  $f$ , telle que  $c = f d_1 \dots d_n$ . Un tel arbre s'appelle une *dérivation* de  $a$ . Cette notion de dérivation généralise la notion logique de démonstration. On peut donc définir l'ensemble  $E$  comme l'ensemble des éléments  $x$  de  $A$  qui ont une dérivation.

On utilise une écriture particulière pour les dérivations. Tout d'abord, on écrit la racine de l'arbre en bas et les feuilles en haut. Ensuite, on trace un trait au dessus de chaque nœud de l'arbre et on écrit ses enfants au dessus de ce trait.