La fonction `f` étant croissante, `f (f p)` $\leq$ `f p`, donc `f p` est un élément de `C` et `p` étant un minorant de `C`, on en déduit `p` $\leq$ `f p`. Par antisymétrie, `p = f p`.

Enfin, par définition, tous les points fixes de `f` appartiennent à `C`, ils sont donc plus grands que `p`.

1.1.2 Les définitions inductives

Voyons maintenant comment ce théorème du point fixe permet de définir des ensembles et des relations.

Soit `A` un ensemble, `f` une fonction de $\mathtt{A}^{\mathtt{n}}$ dans `A` et `E` un sous-ensemble de `A`. L'ensemble `E` est dit *fermé* par la fonction `f` si pour tous $\mathtt{a}_1$, ..., $\mathtt{a}_\mathtt{n}$ dans `E`, `f` $\mathtt{a}_1 \ \ldots \ \mathtt{a}_\mathtt{n}$ est également un élément de `E`. Par exemple, l'ensemble des nombres pairs est fermé par la fonction $\mathtt{n} \mapsto \mathtt{n + 2}$.

Soit `A` un ensemble, une *définition inductive* d'un sous-ensemble `E` de `A` est une famille de fonctions partielles $\mathtt{f}_1$ de $\mathtt{A}^{\mathtt{n}_1}$ dans `A`, $\mathtt{f}_2$ de $\mathtt{A}^{\mathtt{n}_2}$ dans `A`, ... L'ensemble `E` est défini comme le plus petit sous-ensemble de `A` fermé par les fonctions $\mathtt{f}_1$, $\mathtt{f}_2$, ...

Par exemple, le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ formé des nombres pairs est défini inductivement par l'entier `0` — c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{N}^0$ dans $\mathbb{N}$ qui prend la valeur `0` — et la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ $\mathtt{n} \mapsto \mathtt{n + 2}$. Le sous-ensemble de $\{\mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c}\}^*$ formé des mots de la forme $\mathtt{a}^\mathtt{n}\mathtt{b}\mathtt{c}^\mathtt{n}$ est défini inductivement par le mot `b` et la fonction $\mathtt{m} \mapsto \mathtt{a\ m\ c}$. D'une manière générale, une grammaire non contextuelle peut toujours se formuler comme une définition inductive. En logique, l'ensemble des théorèmes se définit comme le sous-ensemble de l'ensemble des propositions défini inductivement par les axiomes et les règles de déduction.

Les fonctions $\mathtt{f}_1$, $\mathtt{f}_2$, ... sont appelées des *règles*. Au lieu de noter une telle règle $\mathtt{x}_1 \ \ldots \ \mathtt{x}_\mathtt{n} \mapsto \mathtt{t}$ on la note

$$\frac{\mathtt{x}_1 \ \ldots \ \mathtt{x}_\mathtt{n}}{\mathtt{t}}$$

Par exemple, l'ensemble des nombres pairs est défini par les deux règles

$$\frac{}{\mathtt{0}}$$

$$\frac{\mathtt{n}}{\mathtt{n + 2}}$$

En notant `P` l'ensemble des nombres pairs, on écrit aussi parfois ces règles

$$\frac{}{\mathtt{0} \in \mathtt{P}}$$

$$\frac{\mathtt{n} \in \mathtt{P}}{\mathtt{n + 2} \in \mathtt{P}}$$

Quand on définit inductivement un langage, on utilise parfois une notation issue de la théorie des langages, qui, par exemple, définit l'ensemble des mots de la forme $\mathtt{a}^\mathtt{n}\mathtt{b}\mathtt{c}^\mathtt{n}$ ainsi