

éléments déjà ordonnés dans un arbre de recherche, on obtient un arbre de hauteur maximale.

Pour que la recherche, l'insertion et la suppression dans un arbre se fasse en temps logarithmique en la taille de l'arbre dans tous les cas, et non uniquement en espérance, il faut faire quelque chose pour que l'arbre reste équilibré quand on insère ou supprime un élément. Une solution naturelle serait d'imposer que l'arbre reste de hauteur minimale, mais du fait du coût du rééquilibrage, il semble impossible de trouver des algorithmes d'insertion et de suppression logarithmiques dans ce cas, même si l'inexistence de tels algorithmes semble n'être qu'une conjecture. On peut cependant imposer des conditions moins rigoureuses qui garantissent la complexité logarithmique de la recherche, l'insertion et la suppression.

Un ensemble d'arbres est appelé *ensemble d'arbres équilibrés*, s'il existe un nombre  $k$  tel que tous les arbres non vides de  $n$  nœuds appartenant à cet ensemble aient une hauteur inférieure à  $k \ln(n)$ . L'ensemble des arbres de hauteur minimale, par exemple, est un ensemble d'arbres équilibrés, mais pas l'ensemble de tous les arbres.

On peut remarquer que tout ensemble fini d'arbres est un ensemble d'arbres équilibrés. De ce fait, tout arbre appartient à au moins un ensemble d'arbres équilibrés. Il est donc important, quand on dit qu'un arbre est équilibré, de préciser l'ensemble auquel on fait référence.

On peut également remarquer qu'il est équivalent de demander qu'il existe un nombre  $k$  tel que tous les arbres non vides de  $n$  nœuds aient une hauteur inférieure à  $k \ln(n)$  à partir d'une certaine valeur de  $n$ .

Une manière de rendre la recherche, l'insertion et la suppression d'un nœud logarithmiques dans tous les cas est de choisir un ensemble d'arbres équilibrés et d'utiliser des algorithmes d'insertion et de suppression qui restent dans cet ensemble. Plusieurs ensembles d'arbres équilibrés pour lesquels de tels algorithmes existent ont été proposés : les arbres d'Adel'son-Velskii et Landis, les arbres 2-3, les arbres bicolores, ...

Par exemple, un arbre est un *arbre d'Adel'son-Velskii et Landis*, ou AVL, si la différence de hauteur des sous-arbres gauche et droit de chaque nœud est égale à 0 ou à 1. On peut démontrer que la hauteur d'un tel arbre est majorée par  $\ln(n + 2) / \ln(\tau) - 1$  où  $\tau = (1 + \sqrt{5}) / 2$  et donc que, quand  $n$  est supérieur à 4, la hauteur d'un tel arbre est majorée par  $\ln(n) / \ln(\tau)$ . Les arbres AVL forment donc un ensemble d'arbres équilibrés.

Quand on applique à un arbre AVL les méthodes d'insertion et de suppression standard, on obtient un arbre qui n'est pas nécessairement AVL. Un déséquilibre peut avoir été créé à tous les nœuds d'une branche de l'arbre. On doit donc rééquilibrer chacun de ces nœuds, de bas en haut, en effectuant des *rotations*. Une *rotation droite* est la transformation suivante