

# Table des matières

---

## I. Les démonstrations

---

<b>1. La logique des prédicats</b> .....	7
1.1 Les définitions inductives .....	7
1.1.1 Le théorème du point fixe .....	8
1.1.2 Les définitions inductives .....	11
1.1.3 La récurrence structurale .....	14
1.1.4 Les dérivations .....	14
1.1.5 La fermeture réflexive-transitive d'une relation .....	15
1.2 Les langages .....	16
1.2.1 Les langages sans variables .....	16
1.2.2 Les variables .....	17
1.2.3 Les langages à plusieurs sortes d'expressions .....	18
1.2.4 La substitution .....	20
1.2.5 L'articulation .....	22
1.3 Les langages de la logique des prédicats .....	24
1.4 Les démonstrations .....	26
1.5 Des exemples de théories .....	32
1.6 Variations sur le tiers exclu .....	39
1.6.1 La double négation .....	40
1.6.2 Les séquents à plusieurs conclusions .....	40
<b>2. Les modèles</b> .....	45
2.1 La notion de modèle .....	45
2.2 Le théorème de correction .....	48

2.3	Le théorème de complétude . . . . .	51
2.3.1	Les trois formes du théorème de complétude . . . . .	51
2.3.2	La démonstration du théorème de complétude . . . . .	51
2.3.3	Les modèles égalitaires . . . . .	56
2.3.4	Les démonstrations de cohérence relative . . . . .	56
2.3.5	La conservativité . . . . .	59
2.4	D'autres usages de la notion de modèle . . . . .	63
2.4.1	Les structures algébriques . . . . .	63
2.4.2	La définissabilité . . . . .	66

---

## II. Les algorithmes

---

<b>3.</b>	<b>Les fonctions calculables</b> . . . . .	69
3.1	Les fonctions calculables . . . . .	69
3.2	La calculabilité sur les listes et les arbres . . . . .	73
3.2.1	La calculabilité sur les listes . . . . .	73
3.2.2	La calculabilité sur les arbres . . . . .	76
3.2.3	Les dérivations . . . . .	77
3.3	L'élimination de la récurrence . . . . .	78
3.4	Les programmes . . . . .	82
3.4.1	L'indécidabilité du problème de l'arrêt . . . . .	83
3.4.2	L'interpréteur . . . . .	84
<b>4.</b>	<b>Le calcul comme une suite de petits pas</b> . . . . .	89
4.1	La réécriture . . . . .	90
4.2	Le lambda-calcul . . . . .	102
4.3	Les machines de Turing . . . . .	116

---

## III. Les démonstrations et les algorithmes

---

<b>5.</b>	<b>Le théorème de Church</b> . . . . .	127
5.1	La notion de réduction . . . . .	127
5.2	La représentation des programmes . . . . .	128
5.3	Le théorème de Church . . . . .	135
5.4	La semi-décidabilité . . . . .	140
5.5	Le premier théorème d'incomplétude de Gödel . . . . .	141
<b>6.</b>	<b>La démonstration automatique</b> . . . . .	145
6.1	Le calcul des séquents . . . . .	145
6.1.1	La recherche de démonstrations en déduction naturelle . . . . .	145
6.1.2	Les règles du calcul des séquents . . . . .	147

---

6.1.3	L'équivalence avec la déduction naturelle .....	149
6.1.4	L'élimination des coupures.....	156
6.2	La recherche de démonstrations dans le calcul des séquents sans coupures .....	161
6.2.1	Les choix.....	161
6.2.2	Les choix arborescents et les choix indifférents .....	162
6.2.3	Restreindre les choix.....	163
<b>7.</b>	<b>Des théories décidables .....</b>	<b>173</b>
<b>8.</b>	<b>La constructivité .....</b>	<b>179</b>



# Index

- alpha-équivalence, 21
- arité, 16
- arithmétique, 33, 61
- arrêt, 83
- axiome, 30
  - d’extensionnalité, 35
  - de l’addition, 33
  - de l’égalité, 32
  - de l’infini, 35
  - de la multiplication, 33
  - de la réunion, 35
  - de récurrence, 33
  - de remplacement, 35
  - des parties, 35
  - du successeur, 33
- bêta-réduction, 103
  - à la racine, 103
  - en appel par nom, 105
- bien fondée, 101
- calcul des séquents, 147
  - sans coupures, 157
- capture de variables, 21
- choix
  - arborescent, 162
  - indifférent, 162
- classe
  - NP, 124
  - P, 123
- cohérence, 30
  - relative, 56
- complétude
  - au sens de Turing, 89
  - d’une théorie, 141
  - faible d’une relation d’ordre, 8
  - forte d’une relation d’ordre, 9
- composition
  - de fonctions, 70
  - de substitutions, 22
- confluente, 92
  - fortement, 100
  - localement, 102
- constante, 16
- contexte de typage, 182
- contradictoire, 30
- couple, 36
- décidable, 72
- déduction naturelle, 27
- définissable, 66
  - dans l’arithmétique, 61
- définition
  - explicite, 7
  - inductive, 11
- démonstration
  - à la Frege et Hilbert, 26
  - constructive, 180
  - en calcul des séquents, 148
  - en déduction naturelle, 28
- démonstrable
  - proposition, 30
  - séquent, 28
- dénotation, 47
- dérivation, 14
  - étiquetée par les règles, 15
- dixième problème de Hilbert, 139, 144

- élimination des quantificateurs, 173
- ensemble
  - héréditairement fini, 49
  - vide, 36
- ensemble d'arbres articulé, 23
- entier
  - de Church, 107
  - de Von Neumann, 37
- équivalence alphabétique, 21
- état, 116
  - final, 117
  - initial, 117
- expression, 16, 19
  - close, 19
- extension, 59
  - conservatrice, 59
  - d'un modèle, 59
- fermeture, 11
- fermeture réflexive-transitive, 15
- fonction
  - bêta de Gödel, 79
  - calculable, 69
  - continue, 8
  - croissante, 8
  - d'Ackermann, 72
  - récursive primitive, 72
- hauteur, 19
- héréditaire, 14
- irréductibilité, 91
- langage, 16
  - de la logique des prédicats, 24
- limite, 8
- machine de Turing, 116
  - non déterministe, 123
- métavariable, 163
- minimisation d'une fonction, 70
- modèle, 45
  - bivalué, 48
  - d'une proposition, 47
  - égalitaire, 56
  - standard, 65
- N-modèle, 132
- noethérien, 101
- nombre d'arguments, 16
- numéro
  - d'un arbre, 76
  - d'une liste, 74
- orthogonal, 92
- paire, 36
- paradoxe de Russell, 34
- perfection, 164
- point fixe
  - premier théorème, 8
  - second théorème, 10
- prédécesseur, 71
- programme, 82
  - de démonstration automatique, 140
  - de vérification de démonstrations, 140
- proposition, 25
  - atomique, 25
  - existentielle, 167
  - normale conjonctive, 167
  - prénex, 167
  - universelle, 167
- radical, 90, 103
- récurrence
  - structurelle, 14
- réduction, 91
  - à la racine, 90
  - en appel par nom, 94
  - parallèle, 101
- règle, 12
  - axiome, 28
  - d'élimination, 28
  - d'introduction, 28
  - de coupure, 148
  - de réécriture, 90
  - de résolution, 172
  - droite, 147
  - gauche, 147
- règle
  - effective, 77
- relation d'ordre, 8
- relativisation, 31, 60
- représentation
  - d'un programme par une proposition, 129
  - d'une fonction
    - dans le lambda-calcul, 105
    - par un ensemble de règles de réécriture, 93
    - par une machine de Turing, 117
- restes chinois, 80
- SAT, 124
- satisfiable, 124
- schéma
  - de compréhension, 33
  - de démonstration, 163

- de récurrence, 34
- de remplacement, 35
- de séparation, 36
- semi-décidable, 72
- séquent, 27
  - à plusieurs conclusions, 40
- sorte
  - d'expressions, 18
  - de termes, 24
- substitution, 20
- suite de réductions, 101
- symbole
  - de fonction, 24
  - de prédicat, 24
- témoin
  - de Henkin, 52
  - propriété du, 179
- terme, 25
  - isolé, 114
- terminaison, 91
  - d'une suite de petits pas, 89
  - en calculabilité, 82
  - forte, 101
- tête de lecture et d'écriture, 116
- théorème, 30
- théorie, 30
  - naïve des ensembles, 34
  - des classes, 33
  - des classes binaires, 34
  - des ensembles de Zermelo-Fraenkel, 35
- tiers exclu, 28
  
- unification, 166
  
- valeur d'un programme, 83
- valide, 47
- valuation, 46
- variable, 17
  - d'une expression, 19
  - libre d'une expression, 19
  
- ZF, 35





## Bibliographie

- [1] René Cori et Daniel Lascar. *Logique mathématique*. Dunod, 2003.
- [2] René David, Karim Nour et Christophe Raffalli. *Introduction à la logique : théorie de la démonstration*. Dunod, 2001.
- [3] Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Paul Taylor. *Proofs and types*. Cambridge University Press, 1989.
- [4] Jean-Louis Krivine. *Lambda-calcul, types et modèles*. Masson, 1990.
- [5] Jean-Louis Krivine. *Théorie des ensembles*. Cassini, 1998.