Si f est une fonction définie par récurrence à partir de deux fonctions g et h telles que g^* et h^* appartiennent à $\mathcal{C}$, alors f^* appartient à $\mathcal{C}$.

Démonstration. La fonction f^* vérifie les propriétés

$$f^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

$$f^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) = h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y))$$

c'est donc la fonction définie par récurrence à partir de g^* et h^*.

Soit f_1 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l$ et i associe le nombre $\chi_<(i, y) \times \chi_=(h^*(w \times \chi_<(i, y), x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i)), \beta(k, l, i+1))$. Si $i \geq y$ alors f^* est définie et nulle en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, i$ et si $i < y$, alors

$$f_1(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l) = \chi_=(h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i)), \beta(k, l, i+1))$$

Soit f_2 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$, k et l associe le plus petit entier i tel que $f_1(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, i) = 0$. L'entier $f_2(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l)$ est égal à y si et seulement si pour tout i strictement inférieur à y, h^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i)$ et $h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i)) = \beta(k, l, i+1)$.

En distinguant deux cas selon que pour tout i strictement inférieur à y, $f_1(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, k, l) = 1$ ou non, on remarque, en outre, que si la fonction f^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$, alors pour tous k et l tels que $\beta(k, l, 0) = g^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1})$, la fonction f_2 est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l$.

Soit f_3 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, r$ associe l'entier

$$1 \dot{-} \chi_=(g^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}), \beta(k, l, 0)) \times \chi_=(f_2(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l), y) \times \chi_=(\beta(k, l, y), r))$$

On remarque que $f_3(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, r) = 0$ si et seulement si la fonction g^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}$ et prend la valeur $\beta(k, l, 0)$, pour tout i strictement inférieur à y, la fonction h^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i)$ et prend la valeur $\beta(k, l, i+1)$ et $\beta(k, l, y) = r$. On remarque, en outre, que si la fonction f^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$, alors pour tous k, l et r la fonction f_3 est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, r$.

Soit f_4 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ associe le plus petit j tel que $f_3(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, hd(hd(j)), tl(hd(j)), tl(j)) = 0$ et f_5 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ associe $tl(f_4(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y))$. D'après la proposition 3.15, la fonction f_5 prend la valeur r en $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ si et seulement s'il existe une suite s telle que $s_0 = g^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1})$, pour tout i strictement inférieur à y, $s_{i+1} = h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, s_i)$ et $s_y = r$. La fonction f_5 est donc la fonction f^* qui, de ce fait, appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$.