alors $STS(t')$ également. Soit u un élément de $STS(t)$ qui ne termine pas. Si le terme u est t lui-même, alors t' ne termine pas et $STS(t')$ contient donc un élément qui ne termine pas. Si cet élément est distinct de t, alors on vérifie, règle par règle, que ou bien cet élément appartient à $STS(t')$ qui contient donc un élément qui ne termine pas ou bien cet élément est de la forme $S(u')$ et $STS(t')$ contient u', qui, d'après la remarque ci-avant, ne termine pas.

On montre ensuite, par récurrence sur la structure de t, que si $t \rhd t'$ et $STS(t)$ contient un terme qui ne termine pas, alors $STS(t')$ également, puis que si $t \rhd^* t'$ et $STS(t)$ contient un terme qui ne termine pas, alors $STS(t')$ également.

On en déduit que si l'un des u_i ne termine pas et $F(u_1, \ldots, u_n) \rhd^* t'$, alors $STS(t')$ contient un terme qui ne termine pas. L'un des sous-termes de t' est donc un radical et t' n'est pas irréductible.

On peut alors montrer que si la fonction f n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors le terme $F(\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n})$ ne termine pas.

Proposition 4.5

Si les termes $u_1, \ldots, u_n$ se réduisent en les termes $\underline{p_1}$, …, $\underline{p_n}$ et f n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors $F(u_1, \ldots, u_n)$ ne termine pas, c'est-à-dire que si $F(u_1, \ldots, u_n) \rhd^* t'$, alors t' n'est pas irréductible.

Démonstration. Soit t' un terme tel que $F(u_1, \ldots, u_n) \rhd^* t'$, on montre par récurrence sur la construction de f que t' n'est pas irréductible.

Les projections, les fonctions identiquement nulles, la fonction successeur, l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de la relation d'ordre sont totales.

Si la fonction f est définie comme la composée de h et g_1, …, g_m, si, dans la suite de réduction de $F(u_1, \ldots, u_n)$ à t' on ne réduit jamais un terme à la racine, t' est lui-même un radical. Si on réduit un radical à la racine après un certain nombre d'étapes, on obtient le terme $H(G_1(u'_1, \ldots, u'_n), \ldots, G_m(u'_1, \ldots, u'_n))$ $\& u'_1 \& \ldots \& u'_n$ où les u'_i sont des réduits de u_i et t' est un réduit de ce terme. Par confluence, u'_i se réduit en $\underline{p_i}$. Si l'une des fonctions g_i n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors, par hypothèse de récurrence, l'un des termes $G_i(u'_1, \ldots, u'_n)$ ne termine pas et donc, d'après la proposition 4.4, le terme $H(G_1(u'_1, \ldots, u'_n), \ldots, G_m(u'_1, \ldots, u'_n))$ non plus et donc le terme $H(G_1(u'_1, \ldots, u'_n), \ldots, G_m(u'_1, \ldots, u'_n)) \& u'_1 \ldots \& u'_n$ non plus. Sinon, $g_i(p_1, \ldots, p_n) = q_i$ et la fonction h n'est pas définie en $q_1, \ldots, q_m$. Dans ce cas, $G_i(u'_1, \ldots, u'_n)$ se réduit en $\underline{q_i}$ et donc par hypothèse de récurrence $H(G_1(u'_1, \ldots, u'_n), \ldots, G_m(u'_1, \ldots, u'_n))$ ne termine pas. Le terme