Proposition 4.3

Si $f(p_1, \ldots, p_n) = q$ et les termes $u_1, \ldots, u_n$ se réduisent en $\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n}$ en appel par nom, alors le terme $F(u_1, \ldots, u_n)$ se réduit en $\underline{q}$ en appel par nom.

Démonstration. Par récurrence sur la construction de f. Si f est une projection $F(u_1, \ldots, u_n)$ se réduit en $((((u_i \& u_1) \& \ldots \& u_{i-1}) \& u_{i+1}) \& \ldots \& u_n)$ qui se réduit, en appel par nom, en $\underline{p_i}$. Le cas où f est une fonction identiquement nulle, la fonction successeur, l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de la relation d'ordre sont similaires.

Si la fonction f est la composée de h et $g_1, \ldots, g_m$, alors $F(u_1, \ldots, u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $(H(G_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, G_m(u_1, \ldots, u_n))) \& u_1 \& \ldots \& u_n$. Par hypothèse de récurrence, ce terme se réduit, en appel par nom, en $\underline{q} \& u_1 \& \ldots \& u_n$, puis en $\underline{q}$.

Si la fonction f est définie par minimisation à partir de la fonction g, alors $g(p_1, \ldots, p_n, r)$ est défini et prend une valeur non nulle pour tous les entiers r strictement inférieurs à q, et $g(p_1, \ldots, p_n, q) = 0$. Le terme $F(u_1, \ldots, u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $F'(u_1, \ldots, u_n, 0)$, puis en $F'(u_1, \ldots, u_n, \underline{1}) \& v_0, \ldots, F'(u_1, \ldots, u_n, \underline{q}) \& v_{q-1} \& \ldots \& v_0$, où v_0 se réduit en $\underline{g(p_1, \ldots, p_n, 0)}, \ldots, v_{q-1}$ en $\underline{g(p_1, \ldots, p_n, q-1)}$, puis en $\mathit{Ifz}(G(u_1, \ldots, u_n, \underline{q}), \underline{q}, F'(u_1, \ldots, u_n, \underline{q+1})) \& v_{q-1} \& \ldots \& v_0$, en $\mathit{Ifz}(0, \underline{q}, F'(u_1, \ldots, u_n, \underline{q+1})) \& v_{q-1} \& \ldots \& v_0$, en $\underline{q} \& v_{q-1} \& \ldots \& v_0$ et enfin en $\underline{q}$.

On veut montrer maintenant que si la fonction f n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors le terme $F(\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n})$ ne termine pas. On commence par la proposition suivante.

Proposition 4.4

Si l'un des termes $u_1, \ldots, u_n$ ne termine pas, alors $F(u_1, \ldots, u_n)$ ne termine pas, c'est-à-dire que si $F(u_1, \ldots, u_n) \rhd^* t'$, alors t' n'est pas irréductible.

Démonstration. On remarque tout d'abord que si un terme de la forme $S(u)$ ne termine pas, alors u non plus. Ensuite, si t est un terme, on définit l'ensemble des ***sous-termes stricts*** de t par récurrence sur la structure de t

- si $t = x$, alors $STS(t) = \{t\}$,
- si f est un symbole de fonction distinct de *Ifz* (c'est-à-dire l'un des symboles 0, S, & ou un symbole F associé à une fonction calculable) et $t = f(u_1, \ldots, u_n)$, alors $STS(t) = \{t\} \cup \bigcup_i STS(u_i)$,
- si $t = \mathit{Ifz}(u_1, u_2, u_3)$, alors $STS(t) = \{t\} \cup STS(u_1)$.

On montre que pour un ensemble de règles de réécriture construit à la définition 4.15, si $t \longrightarrow t'$ et $STS(t)$ contient un terme qui ne termine pas,