$$f(g(x)) \longrightarrow b$$

est-t-il orthogonal ?

Montrer que le terme $f(g(h(c)))$ se réduit en deux termes irréductibles distincts.

Exercice 4.4

L'ensemble formé des règles

$$x - x \longrightarrow 0$$
$$S(x) - x \longrightarrow 1$$
$$\infty \longrightarrow S(\infty)$$

est-t-il orthogonal ?

Montrer que le terme $\infty - \infty$ se réduit en deux termes irréductibles distincts.

Cette notion d'orthogonalité est motivée par le résultat suivant que nous ne démontrons pas ici.

Proposition 4.1 (La confluence des ensembles de règles orthogonaux)

Si $\mathcal{R}$ est un ensemble orthogonal de règles de réécriture, alors la relation $\rhd$ est confluente.

Définition 4.10 (La représentation des entiers)

Si le langage $\mathcal{L}$ contient une constante 0 et un symbole unaire S et si p est un entier, on note $\underline{p}$ le terme $S(S(\ldots(S(0))\ldots))$ avec p occurrences du symbole S.

Définition 4.11 (La représentation des fonctions)

Soit $\mathcal{L}$ un langage qui contient les symboles 0 et S et $\mathcal{R}$ un ensemble confluent de règles de réécriture tel que les termes de la forme $\underline{p}$ soient irréductibles, et F un symbole de $\mathcal{L}$. Soit f une fonction partielle. Le couple $\mathcal{R}, F$ *représente la fonction* f si pour tout $p_1, \ldots, p_n$

- si $f(p_1, \ldots, p_n) = q$ alors $F(\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n}) \rhd^* \underline{q}$,
- si f n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors $F(\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n})$ ne termine pas.

Cette définition n'entre pas complètement dans le cadre que nous avons défini dans l'introduction de ce chapitre puisqu'un terme dont plusieurs sous-termes sont des radicaux peut se réduire en plusieurs autres termes.