La relation $\longrightarrow$ s'étend en une relation qui permet d'effectuer une réduction dans un sous-terme.

Définition 4.4 (Une étape de réduction)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de règles de réécriture, *une étape de $\mathcal{R}$-réduction* est la relation inductivement définie par

- si $t \to u$ alors $t \rhd u$,
- si $t \rhd u$, alors $f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \rhd f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n)$.

Définition 4.5 (La réduction)

La réduction $\rhd^*$ est la fermeture réflexive-transitive de la relation $\rhd$.

Exercice 4.1

Soit un ensemble formé des deux règles de réécriture

$$0 + y \longrightarrow y$$

$$S(x) + y \longrightarrow S(x + y)$$

Montrer que $S(S(0)) + S(S(0)) \rhd^* S(S(S(S(0))))$.

Définition 4.6 (Irréductibilité, terminaison)

Soit R une relation binaire. On dit qu'un élément t est *irréductible* pour la relation R s'il n'existe pas d'élément u tel que $t \; R \; u$.

On dit qu'un élément t *termine* s'il existe un élément t' irréductible tel que $t \; R^* \; t'$.

Définition 4.7 (Irréductibilité, terminaison d'un terme)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de règles de réécriture. On dit qu'un terme t est *irréductible*, s'il est irréductible pour la relation $\rhd$, c'est-à-dire si aucun de ses sous-termes n'est un radical.

On dit qu'un terme t *termine* s'il termine pour la relation $\rhd$, c'est-à-dire s'il existe un terme irréductible t' tel que $t \rhd^* t'$.

Par exemple, si on a deux règles $f(x) \longrightarrow a$ et $\omega \longrightarrow \omega$, alors dans le terme ω ne termine pas car le seul terme en lequel il se réduise est ω lui-même. En revanche, le terme $f(\omega)$ termine. En effet, on peut réduire le sous-terme ω, ce