

Entrent également dans ce cadre un certain nombre de langages de programmation théoriques, plus dépouillés. Ces langages ont une utilité différente des langages de programmation traditionnels : les algorithmes sont bien entendu plus difficiles à exprimer dans ces langages organisés autour d'un nombre minimal de constructions, mais ils sont plus faciles à étudier : simplifier le langage dans lequel un algorithme est exprimé permet de simplifier les raisonnements qui permettent d'établir que cet algorithme termine, préserve un certain invariant ou a une certaine complexité.

Nous allons voir dans ce chapitre trois exemples de tels langages minimaux : la réécriture, le lambda-calcul et les machines de Turing.

## 4.1 La réécriture

La réécriture est le plus simple des langages dans lesquels le calcul est exprimé comme une suite de petits pas. Les termes avec lesquels on calcule sont simplement des termes d'un langage sans lieurs et le pas élémentaire de calcul est défini par un ensemble de règles, appelées *règles de réécriture*, qui spécifient comment transformer un terme en un autre. Par exemple, la règle

$$0 + y \longrightarrow y$$

spécifie que n'importe quel terme de la forme  $0 + t$  peut se transformer en  $t$ .

### Définition 4.1 (Règle de réécriture)

Soit  $\mathcal{L}$  un langage sans lieurs. Une *règle de réécriture* du langage  $\mathcal{L}$  est un couple formé de deux termes de  $\mathcal{L}$ ,  $l$  et  $r$ , noté  $l \longrightarrow r$ .

### Définition 4.2 (Une étape de réduction à la racine)

Soit  $\mathcal{R}$  un ensemble de règles de réécriture, une *étape de  $\mathcal{R}$ -réduction à la racine* est la relation définie sur les termes du langage  $\mathcal{L}$  par  $t \longrightarrow u$  s'il existe une règle de réécriture  $l \longrightarrow r$  dans  $\mathcal{R}$  et une substitution  $\sigma$  telle que  $\sigma l = t$  et  $\sigma r = u$ .

### Définition 4.3 (Radical)

Soit  $\mathcal{R}$  un ensemble de règles de réécriture, un terme  $t$  est un *radical* s'il est réductible par la relation  $\longrightarrow$ , c'est-à-dire s'il existe une règle de réécriture  $l \longrightarrow r$  et une substitution  $\sigma$  telle que  $\sigma l = t$ .