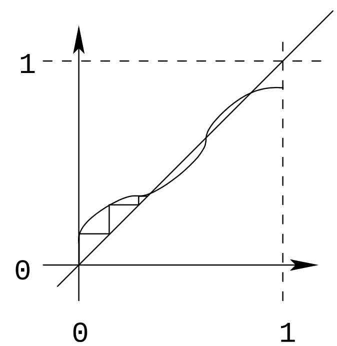
Proposition 1.1 (Le premier théorème du point fixe)

Soit $\leq$ une relation d'ordre faiblement complète sur un ensemble E qui a un plus petit élément m. Soit f une fonction de E dans E. Si f est continue, alors $p = \lim_i\ (f^i\ m)$ est le plus petit point fixe de f.



Démonstration. Tout d'abord, m étant le plus petit élément de E, $m \leq fm$. La fonction f étant croissante, $f^i m \leq f^{i+1} m$. La suite $f^i m$ est croissante, elle a donc bien une limite. La suite $f^{i+1} m$ a également p pour limite. Donc $p = \lim_i\ (f\ (f^i\ m)) = f\ (\lim_i\ (f^i\ m)) = f\ p$. De plus, p est le plus petit point fixe, car si q est un point fixe, $m \leq q$ et, la fonction f étant croissante, $f^i m \leq f^i q = q$. Donc $p = \lim_i\ (f^i\ m) \leq q$.

Le second théorème du point fixe donne l'existence d'un point fixe pour les fonctions croissantes, même si elles ne sont pas continues, en supposant une propriété un peu plus forte sur la relation d'ordre.

Définition 1.5 (Relation d'ordre fortement complète)

Une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble E est *fortement complète* si tout sous-ensemble A de E a une borne supérieure, $\sup A$.

La relation d'ordre ordinaire sur l'intervalle $[0, 1]$ de la droite réelle est un exemple de relation d'ordre fortement complète. La relation d'ordre ordinaire sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas fortement complète, car l'ensemble $\mathbb{R}^+$ tout entier n'a pas de borne supérieure.

Soit A un ensemble quelconque, la relation d'inclusion $\subseteq$ sur l'ensemble $\wp(A)$ des parties de A est un autre exemple de relation d'ordre fortement complète. La borne supérieure d'un ensemble B est l'ensemble $\bigcup_{C \in B} C$.