Proposition 3.19

Soit f une fonction calculable, u le numéro d'un programme exprimant cette fonction et $p_1, \ldots, p_n$ des entiers. Alors, la fonction f est définie en $p_1, \ldots, p_n$ si et seulement si la fonction F est définie en $\ulcorner App^n(u, \underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n})\urcorner$ et si ces deux fonctions sont définies, alors $F(\ulcorner App^n(u, \underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n})\urcorner) = \ulcorner \underline{f(p_1, \ldots, p_n)}\urcorner$.

Démonstration. Par récurrence sur la construction de f.

Proposition 3.20

Soit f une fonction calculable, u le numéro d'un programme exprimant cette fonction et $p_1, \ldots, p_n$ des entiers. Alors, la fonction f est définie en $p_1, \ldots, p_n$ si et seulement si la fonction G^n est définie en $u, p_1, \ldots, p_n$ et si ces deux fonctions sont définies, alors $G^n(u, p_1, \ldots, p_n) = f(p_1, \ldots, p_n)$.

Démonstration. D'après la proposition 3.19.

Exercice 3.5

Montrer que la fonction F_3 est récursive primitive.

Exercice 3.6

Définir un interpréteur pour les programmes écrits dans le langage formé des symboles π_i^n, Z^n, $Succ$, $\circ_m^n$, μ^n et Rec^n, correspondant à la définition 3.1.

Un corollaire de l'existence de cet interpréteur est la généralisation suivante du théorème d'indécidabilité du problème de l'arrêt.

Proposition 3.21

Soit A un sous-ensemble décidable de l'ensemble des programmes qui terminent toujours. Alors, il existe une fonction calculable totale qui n'est représentée par aucun programme de A.

Démonstration. Soit H la fonction calculable suivante : si n est le numéro d'un programme unaire de A et p un entier, alors $H(n,p) = G^1(n,p)$, sinon $H(n,p) = 0$. La fonction H est calculable, c'est un interpréteur pour tous les programmes unaires de A et elle est totale. Soit la fonction H' telle que