une projection, une fonction constante égale à 0 ou la fonction successeur, alors $f^*(w, x_1, \ldots, x_n) = \chi_{\mathbb{N}^*}(w) \times f(x_1, \ldots, x_n)$ et la fonction f^* appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$. Si f est définie comme la composition de fonctions h et $g_1, \ldots, g_m$, alors, par hypothèse de récurrence, les fonctions h^*, $g_1^*, \ldots, g_m^*$ appartiennent à $\mathcal{C}$ et $f^*(w, x_1, \ldots, x_n) = h^*(w, g_1^*(w, x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(w, x_1, \ldots, x_n))$. La fonction f^* est donc la composition d'une projection, de g_1^*, $\ldots$, g_m^* et de h^*. Elle appartient donc à l'ensemble $\mathcal{C}$. Si f est définie par récurrence à partir de deux fonctions g et h, alors, par hypothèse de récurrence, les fonctions g^* et h^* appartiennent à l'ensemble $\mathcal{C}$ et d'après la proposition 3.17, la fonction f^* également. Si f est définie par minimisation à partir d'une fonction g, alors, par hypothèse de récurrence, la fonction g^* appartient à $\mathcal{C}$ et la fonction f^* est la fonction qui à $w, x_1, \ldots, x_n$ associe le plus petit i tel que $g^*(w, x_1, \ldots, x_n, i) = 0$, c'est donc la fonction définie par minimisation à partir de g^* et elle appartient à $\mathcal{C}$.

Puisque la fonction f^* appartient à $\mathcal{C}$, c'est également le cas de la fonction qui à $x_1, \ldots, x_n$ associe l'entier $f^*(1, x_1, \ldots, x_n)$ qui n'est autre que la fonction f.

3.4 Les programmes

L'ensemble des fonctions calculables est défini de manière inductive. Pour chaque fonction calculable, il existe donc une ou plusieurs dérivations de cette fonction. Ces dérivations sont des arbres, que l'on appelle des *programmes*.

Les nœuds de ces arbres sont étiquetés par des symboles qui correspondent aux huit règles de la définition 3.9 : π_i^n, avec i et n entiers tels que i soit compris entre 1 et n, pour la règle des projections, Z^n pour la règle des fonctions identiquement nulle, *Succ* pour la règle du successeur, $+$ pour la règle de l'addition, $\times$ pour la règle de la multiplication, $\chi_\leq$ pour la règle de la fonction caractéristique de la relation d'ordre, $\circ_m^n$ pour la règle de composition et μ^n pour la règle de la minimisation. Les programmes sont donc des arbres étiquetés par les symboles π_i^n, Z^n, *Succ*, $+$, $\times$, $\chi_\leq$, $\circ_m^n$ et μ^n qui sont eux-mêmes des arbres étiquetés par les éléments d'un ensemble fini.

Naturellement, si, au lieu de s'appuyer sur la définition 3.9, on s'appuie sur la définition 3.1, les programmes sont des arbres étiquetés par les symboles π_i^n, Z^n, *Succ*, $\circ_m^n$, μ^n et Rec^n pour la règle de récurrence.

Définition 3.12 (Terminaison, valeur)

On dit qu'un programme *termine* en $p_1, \ldots, p_n$ si la fonction f calculée par ce