Proposition 3.17

Si f est une fonction définie par récurrence à partir de deux fonctions g et h telles que g^* et h^* appartiennent à $\mathcal{C}$, alors f^* appartient à $\mathcal{C}$.

Démonstration. La fonction f^* vérifie les propriétés

$$f^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

$$f^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) = h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y))$$

c'est donc la fonction définie par récurrence à partir de g^* et h^*.

Soit f_1 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l$ et i associe le nombre $\chi_<(i,y) \times \chi_=(h^*(w \times \chi_<(i,y), x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k,l,i)), \beta(k,l,i+1))$. Si $i \geq y$ alors f^* est définie et nulle en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, i$ et si $i < y$, alors

$$f_1(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l) = \chi_=(h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k,l,i)), \beta(k,l,i+1))$$

Soit f_2 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$, k et l associe le plus petit entier i tel que $f_1(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, i) = 0$. L'entier $f_2(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l)$ est égal à y si et seulement si pour tout i strictement inférieur à y, h^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k,l,i)$ et $h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k,l,i)) = \beta(k,l,i+1)$.

On en déduit qu'il existe dans $\mathcal{C}$ une fonction f_3 qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$, k, l et r associe l'entier 0 si et seulement si la fonction g^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}$ et prend la valeur $\beta(k,l,0)$, pour tout i strictement inférieur à y, la fonction h^* est définie en $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k,l,i)$ et prend la valeur $\beta(k,l,i+1)$ et $\beta(k,l,y) = r$.

Soit f_4 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ associe le plus petit j tel que $f_3(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, hd(hd(j)), tl(hd(j)), tl(j)) = 0$ et f_5 la fonction de $\mathcal{C}$ qui à $w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ associe $tl(f_4(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, y))$. D'après la proposition 3.15, la fonction f_5 prend la valeur r en $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ si et seulement s'il existe une suite s telle que $s_0 = g^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1})$, pour tout i strictement inférieur à y, $s_{i+1} = h^*(w, x_1, \ldots, x_{n-1}, i, s_i)$ et $s_y = r$. La fonction f_5 est donc la fonction f^* qui, de ce fait, appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$.

Proposition 3.18

Une fonction appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ si et seulement si elle est calculable.

Démonstration. D'après la définition 3.1 et les propositions 3.2 et 3.3, l'ensemble des fonctions calculables est clos par toutes les règles de la définition inductive de l'ensemble $\mathcal{C}$, il contient donc l'ensemble $\mathcal{C}$.

Réciproquement, on commence par montrer, par récurrence sur la construction de f que si f est une fonction calculable, alors f^* appartient à $\mathcal{C}$. Si f est