il diviserait $m!(i+1)$ et il ne pourrait donc pas diviser $e_i = m!(i+1)+1$. On utilise ensuite un résultat de théorie des nombres appelé *théorème des restes chinois* : si $e_0, \ldots, e_y$ est une suite d'entiers premiers entre eux deux à deux et $s_0, \ldots, s_y$ une suite d'entiers quelconques, il existe un entier z tel que pour tout i, $s_i \equiv z[\text{mod } e_i]$. D'après ce théorème, il existe un entier z tel que $s_i \equiv z[\text{mod } e_i]$. On pose $k = m!$ et $l = z$. On a $s_i \equiv l[\text{mod } e_i]$ et comme, par ailleurs s_i est inférieur à m qui est lui-même inférieur à k et donc à $k(i+1)+1$, s_i est le reste de la division euclidienne de l par $k(i+1)+1$, c'est-à-dire $s_i = \beta(k, l, i)$.

Le fait que la fonction définie par récurrence à partir de g et h prenne la valeur r en $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ s'exprime désormais par le fait qu'il existe deux nombres k et l tels que $\beta(k, l, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$, pour tout i strictement inférieur à y, $\beta(k, l, i+1) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i))$ et $\beta(k, l, y) = r$.

Le fait que pour tout i strictement inférieur à y, on ait $\beta(k, l, i+1) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i))$ peut s'exprimer comme le fait que la plus petite valeur d'annulation de la fonction f_1, qui à $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, k, l, i$ associe 1 si $i < y$ et $\beta(k, l, i+1) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, i, \beta(k, l, i))$ et 0 sinon, est y. Toutefois, il n'est pas si facile de montrer l'appartenance à $\mathcal{C}$ de la fonction f_1, qui doit être définie et valoir 0 en y que h soit définie en $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, \beta(k, l, y)$ ou non. Pour contourner cette difficulté, on montre un théorème un peu plus général : si la fonction f est calculable, alors la fonction f^* appartient à $\mathcal{C}$, où la fonction f^* est définie de la manière suivante.

Définition 3.11

Soit f une fonction de n arguments, on note f^* la fonction de $n+1$ arguments définie par $f^*(0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ et $f^*(w, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ si $w \neq 0$.

Proposition 3.16

L'ensemble $\mathcal{C}$ contient la soustraction $\dot{-}$, le quotient et le reste de la division euclidienne, les fonctions $\chi_{\mathbb{N}^*}$, $\chi_<$ et $\chi_=$ caractéristiques de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ et des relations $<$ et $=$, la fonction β et les fonctions ;, *hd* et *tl*.

Démonstration. La soustraction, le quotient et le reste de la division euclidienne se définissent avec l'addition, la multiplication, la fonction caractéristique de la relation d'ordre et la minimisation. Les fonctions $\chi_{\mathbb{N}^*}$, $\chi_<$ et $\chi_=$ se définissent avec la soustraction. La fonction β avec l'addition la multiplication et le reste de la division euclidienne. La fonction ; avec l'addition, la multiplication et le quotient de la division euclidienne. Les fonctions *hd* et *tl* avec l'addition, la multiplication, le quotient de la division euclidienne et la minimisation.