- la multiplication et
- la fonction caractéristique de la relation d'ordre $\chi_{\leq}$, définie par $\chi_{\leq}(x, y) = 1$ si $x \leq y$ et $\chi_{\leq}(x, y) = 0$ sinon,

et clos par
- la composition et
- la minimisation.

Cette définition est similaire à la définition 3.1, mais la clôture par la récurrence y est remplacée par trois fonctions de base : l'addition, la multiplication et la fonction $\chi_{\leq}$. On veut montrer que ces deux définitions sont équivalentes, c'est-à-dire qu'une fonction appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ si et seulement si elle est calculable. Pour cela, on doit montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est clos par définition par récurrence, c'est-à-dire que si g et h sont deux fonctions de $\mathcal{C}$ et si f est définie par récurrence à partir de g et h, alors f appartient à $\mathcal{C}$.

La fonction définie par récurrence à partir de g et h prend la valeur r en $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ s'il existe une suite finie $s_0, \ldots, s_y$ telle que $s_0 = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$, pour tout i strictement inférieur à y, $s_{i+1} = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, i, s_i)$ et $s_y = r$. On veut exprimer la suite finie $s_0, \ldots, s_y$ par un entier. La première idée est de l'exprimer par l'entier $s_0; (\ldots; (s_y; 0) \ldots)$ et il n'est pas difficile de montrer que les fonctions ;, *hd* et *tl* appartiennent à l'ensemble $\mathcal{C}$. Toutefois, comme on ne dispose pas encore de la définition par récurrence, on ne peut pas encore montrer que la fonction *nth* appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$. On utilise donc une autre expression des suites finies, qui repose sur une fonction appelée *la fonction β de Gödel.*

Définition 3.10

La fonction β de Gödel est définie par

$$\beta(k, l, i) = l \bmod (k(i + 1) + 1)$$

où $x \bmod y$ est le reste de la division euclidienne de x par y.

Proposition 3.15

Pour toute suite finie $s_0, \ldots, s_y$, il existe deux entiers k, l tels que pour tout i inférieur à y, $s_i = \beta(k, l, i)$.

Démonstration. Soit m un entier strictement supérieur à $y + 1, s_0, \ldots, s_y$. Il est facile de vérifier que les entiers $e_i = m!(i + 1) + 1$ pour i inférieur à y sont premiers entre eux deux à deux : si e_i et e_j avaient un diviseur commun premier c, alors c diviserait aussi leur différence $m!(i - j)$, il serait donc inférieur à m,