cette liste. Soit $r = hd(a)$ la racine de a et $l'' = tl(a)$ la liste des sous-arbres immédiats de a et s la liste des racines des arbres de l''. Alors si $r;s$ appartient à G, $g(l') = 1$ et $g(l'') = 1$ on pose $g(l) = 1$ sinon on pose $g(l) = 0$. La fonction g se définit donc par récurrence bien fondée à partir de fonctions calculables, car, d'après la proposition 3.7, les numéros des listes l' et l'' sont des entiers strictement inférieurs à celui de l. Elle est donc calculable.

L'ensemble A, inductivement défini par les règles $f_1, f_2, \ldots$, en revanche, n'est pas toujours décidable. Toutefois, il est semi-décidable. Soit x un élément de E, on peut énumérer tous les arbres l'un après l'autre, et tester si chacun est une dérivation dont la racine est x, ou non. Si x est un élément de A, alors une telle dérivation finira bien par se présenter. Sinon, le processus d'énumération se poursuivra à l'infini.

Proposition 3.14 (Les ensembles d'arbres inductivement définis)

Soit E un ensemble d'arbres articulé et $f_1, f_2, \ldots$ un ensemble de règles effectif sur l'ensemble E. Alors, le sous-ensemble A de E inductivement défini par ces règles est semi-décidable.

Démonstration. Soit $g(x, y)$ la fonction calculable telle que $g(x, y) = 1$ si x est le numéro d'une dérivation d'un élément de E et la racine de x est y et $g(x, y) = 0$ sinon. La fonction h définie par $h(y)$ est le plus petit entier x tel que $1 \dot{-} g(x, y) = 0$ composée avec la fonction constante égale à 1 est un algorithme de semi-décision pour A. Si y appartient à A, alors $h(y) = 1$, sinon h n'est pas définie en y.

3.3 L'élimination de la récurrence

L'ensemble des fonctions calculables a une définition alternative, qui, bien que moins naturelle que la définition 3.1, sera utile dans la suite de ce livre.

Définition 3.9

L'ensemble $\mathcal{C}$ est inductivement défini comme le plus petit ensemble contenant

- les projections,
- les fonctions identiquement nulles,
- la fonction successeur,
- l'addition,